# Resolución de triángulos oblicuángulos

Diego Fernando Ramírez

**Resumen:** Se enuncia los principales teoremas empleados en la resolución de triángulos oblicuángulos. Con ellos, se ilustra cómo resolver los cinco casos de resolución que se presentan, incluyendo algunos caso atípicos (cuando se conoce el perímetro y dos ángulos internos, o un lado, el ángulo comprendido entre los lados restantes, así como su suma). Luego, se discute la determinación del área para cada caso, las relaciones entre los radios de las circunferencias inscritas, circunscritas y excritas, las longitudes de las medianas, bisectrices y alturas.

*Términos claves:* Triángulo oblicuángulo, ángulo interno, lado, semiperímetro, circunferencia inscrita, circunferencia circunscrita, circunferencia excrita, mediana, bisectriz, altura, triángulo excrito, triángulo pedal.

**Abstract:** The principal theorems for solving oblicue triangles are presented. With them, we show how to solve the five classical cases, also some atipical cases (when we know the perimeter and two internal angles, or a lade, an angle between the other lades as like their sum.) Finally, we shall discute how to calcule the area of triangles for the difference cases, the relations between the radii of inscribed, circunscribed and excribes circles, the lengths of medians, bisectors and heights.

*Key terms:* Oblicue triangle, internal angle, lade, semiperimeter, inscribed circle, circumscribed circle, excrite circle, median, bisector, height.

## 1. Introducción

La rama de la trigonometría conocida como la resolución de triángulos es el espacio ideal para aplicar muchos de sus resultado, además de permitir integrar otros campos de la matemática elemental como el álgebra y la geometría. Esto se traduce en una de las primeras oportunidades que tiene un estudiante que comienza a aprender trigonometría de ver todo su potencial. En muchos textos sobre la materia, el tema en cuestión era tratado con una extensión considerable, en parte, porque los cálculos que se emplean son bastante complicados y requerían el empleo de los logaritmos para llevarlos a cabo. Sin embargo, la llegada de nuevas tecnologías dio a un lado estos inconvenientes, simplificando la enseñanza de este tema, pero a tal grado que muchos resultados como el teorema de la tangente, las fórmulas de Mollweide, entre otras, dejaron de mencionarse, aun cuando estos hacen parte integral de este campo; y en los textos en donde se mencionan, están bastante entrelazados con el cálculo logarítmico, que si bien, fue una herramienta crucial en su momento, hace que la discusión de dichos resultados resulte bastante engorrosa. Guiado por estas reflexiones, me di a la tarea de escribir estas líneas con el propósito de proporcionar a quienes quieran profundizar en el tema, un material de referencia.

Con este objetivo, el presente artículo está dividido en seis secciones. En la primera, se define lo que se entiende por triángulos oblicuángulos, se indica la notación a emplear y los casos clásicos de resolución. En la segunda, se enuncian y demuestran los teoremas fundamentales usados en resolver triángulos en general. Entre ellos están el del seno, del coseno, de la tangente, las fórmulas de Mollweide y las de proyección. En la siguiente sección, se resuelve los cinco casos de resolución de triángulos. Las discusiones analíticas para cada caso se acompañan con sus correspondientes construcciones geométricas. En esta sección se trata, además, de dos casos cuyos parámetros dados no corresponden a los casos clásicos. En particular, se muestra cómo resolver un triángulo cuando se conoce su perímetro y dos de sus ángulos internos, y cuando se conoce un lado, su ángulo opuesto y la suma de los lados restante. La cuarta sección se enfoca en el cálculo del área de un triángulo para cada caso tratado. La siguiente sección extiende la discusión de los radios de las diferentes circunferencias asociadas a un triángulo, tema que surge en las demostraciones de los teoremas enunciados. La última sección tiene como fin mostrar cómo se calculan las medianas, bisectrices y alturas en un triángulo, además de mostrar cómo se resuelve un triángulo cuando se conocen las tres medianas o las tres alturas.

## 2. Definiciones y notación

Se entiende por triángulo *oblicuángulo* por uno que sea acutángulo u obtusángulo. Para denotar los lados y los vértices de un triángulo oblicuángulo se sigue la siguiente convención: para los lados, se emplean letras minúsculas y para los vértices de los ángulos opuestos a estos lados se utilizan las correspondientes letras en mayúscula. En la figura 1, el lector verá materializado el convenio en cuestión. En algunos tratados sobre este tema, el valor de los ángulos internos suele indicarse mediante letras del alfabeto griego, pero aquí, dichos

valores se representarán con las letras asignadas para nombrar los vértices del triángulo. Si bien, esto puede parecer al lector un abuso de notación, pronto verá las ventajas que acarrea usarla a la hora de plantear los teoremas referentes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

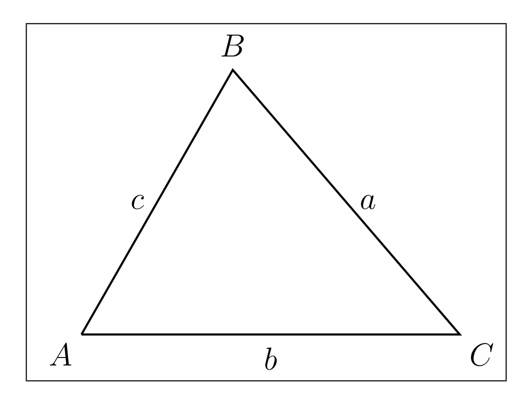



Figura 1. Ilustración de la convención para nombrar los lados y los vértices de un triángulo oblicuángulo.

Una vez establecida la nomenclatura, es menester discutir cuáles son los parámetros mínimos que deben conocerse del triángulo para determinarlo completamente, y además, si dicha elección conduce a una, varias o a ninguna solución. Por supuesto, el interés se centra en aquellos que proporcionen al menos una sola. Sobra advertir que una vez establecidos, no siempre se garantiza su unicidad. Bajo estas circunstancias, la geometría plana dice que el número de estos deben ser tres, de los cuales uno de ellos debe ser un lado. Dependiendo de los parámetros conocidos se tendrán cinco casos a saber:

- *Caso 1:* dos ángulos y un lado común a ellos;
- *Caso 2:* dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos;
- *Caso 3:* dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos;
- *Caso 4:* dos lados y el ángulo comprendido entre ellos;
- *Caso 5:* tres lados.

Establecidos los casos a tratar, ahora la discusión se dirige a encontrar teoremas que permitan resolverlos. Los tres primeros casos se resuelven completamente mediante el teorema del seno, el cuarto se soluciona con el teorema del coseno o la combinación de los teoremas de la tangente y del seno y el quinto se trata ya sea con el del coseno o con las fórmulas del ángulo medio.

## 3. Teoremas referentes a triángulos oblicuángulos

A continuación, se enuncian y demuestran los teoremas más importantes sobre triángulos oblicuángulos.

### *3.1 El teorema del seno*

El teorema del seno dice lo siguiente: *La longitud de un lado de un triángulo oblicuángulo es proporcional al seno de su ángulo opuesto.*

De acuerdo a la figura 1, este teorema se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \tag{1}$$

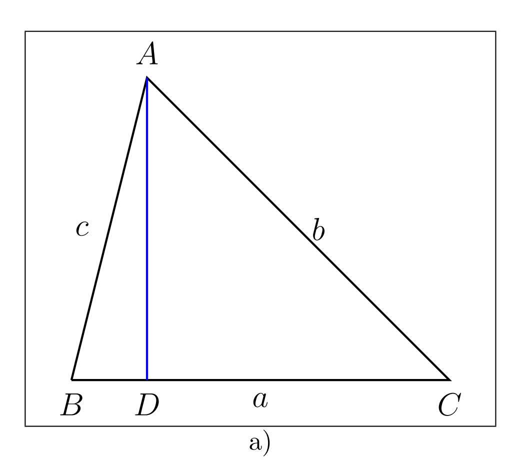
Demostración: La prueba de este teorema se divide en dos casos:

Caso I: El triángulo es acutángulo. Considérese el triángulo acutángulo de la figura 2-a, al cual se le traza la altura correspondiente al lado $a$, la cual lo intercepta en $D$. Del triángulo rectángulo $ABD$:

$$\overline{AD} = c \operatorname{sen} B,$$

y del triángulo rectángulo $ACD$:

$$\overline{AD} = b \operatorname{sen} C.$$



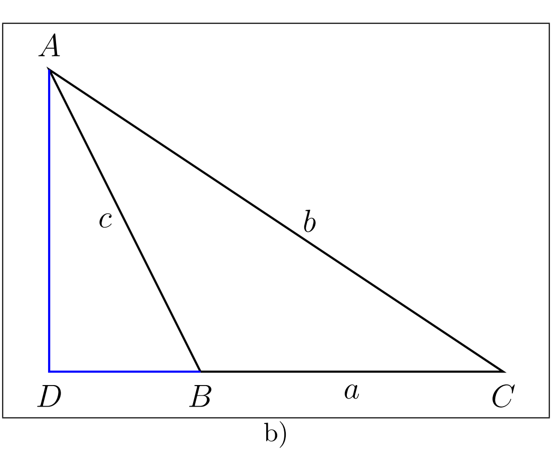



Figura 2. Construcción geométrica para la demostración de los teoremas del seno y del coseno.

Igualando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$b \text{ sen } C = c \text{ sen } B.$$

Dividiendo por $\text{sen } B \text{ sen } C$, se tiene, finalmente:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Caso II: El triángulo es obtusángulo. En el triángulo obtusángulo de la figura 2-b, al cual se le traza la altura correspondiente al lado $a$, la cual lo intercepta en $D$. Del triángulo rectángulo $ABD$:

$$\overline{AD} = c \text{ sen } (180 - B) = c \text{ sen } B,$$

y del triángulo rectángulo $ACD$:

$$\overline{AD} = b \text{ sen } C.$$

Igualando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$b \text{ sen } C = c \text{ sen } B.$$

Dividiendo por $\text{sen } B \text{ sen } C$, se tiene, finalmente:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Si se trazan perpendiculares a los lados $b$ y $c$ por los vértices $B$ y $C$, se demuestran las demás proporciones indicadas en la ecuación (1) empleando el mismo razonamiento expuesto anteriormente. De esta forma, el teorema queda demostrado.

Para terminar esta discusión, se buscará una interpretación geométrica de la constante de proporcionalidad del teorema del seno. Para ello, la figura 3 será de mucha utilidad.

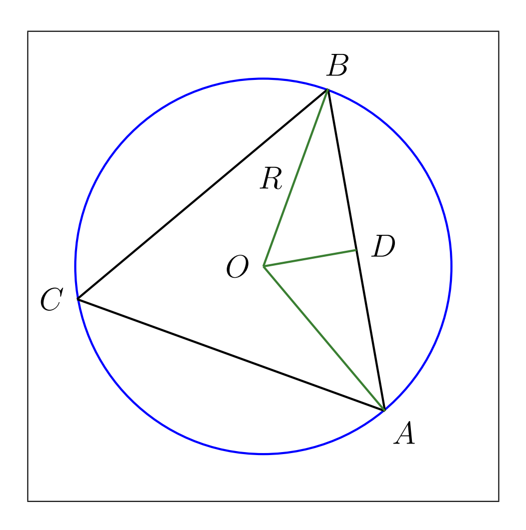



Figura 3. Construcción geométrica para encontrar la constante de proporcionalidad del teorema del seno.

Sea el triángulo $ABC$, en el cual se circunscribe una circunferencia de radio $R$ y centro en $O$. Se trazan líneas desde $O$ hasta $A$ y $B$ y se traza una perpendicular por $O$ al lado $AB$, cortándolo en $D$. Entonces:

El triángulo $OAB$ es isósceles, porque $\overline{OB} = \overline{OA} = R$, y como $OD \perp AB$, entonces $\angle BOD = \angle DOA$.

Como el ángulo $\angle ACB$ es inscrito, entonces es la mitad del ángulo $\angle AOB$, y como $\angle BOD = \angle DOA$, se tiene que $\angle ACB = \angle BOD = \angle DOA$.

Del triángulo $OAD$, $\overline{AD} = \overline{AB}/2 = R \operatorname{sen} \angle DOA = R \operatorname{sen} \angle ACB$, y por lo tanto

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \angle ACB} = 2R.$$

Del teorema del seno, se deduce que

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \angle BAC} = \frac{\overline{CA}}{\operatorname{sen} \angle CBA} = 2R \tag{2}$$

La ecuación (2) permite concluir que *la constante de proporcionalidad del teorema del seno aplicado a un triángulo oblicuángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita a él.*

### *3.2 El teorema del coseno*

El teorema del coseno dice lo siguiente: *El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes menos dos veces el producto de estos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.*

Este teorema se escribe, de acuerdo al triángulo de la figura 1, como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \tag{3}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \tag{4}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \tag{5}$$

La demostración de este teorema, al igual que la del teorema del seno, se hace en dos etapas:

Caso I: El triángulo es acutángulo. De la figura 2-a, al aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos $ACD$ y $ABD$, se tiene:

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \tag{6}$$
$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \tag{7}$$

Restando la ecuación (7) de la ecuación (6) miembro a miembro:

$$b^2 - c^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2 \tag{8}$$

Del triángulo $ABD$:

$$\overline{BD} = c \cos B,$$

y como $\overline{DC} = a - \overline{BD} = a - c \cos B$, la ecuación (8) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$b^2 - c^2 = (a - c \cos B)^2 - c^2 \cos^2 B$$

Despejando $b^2$ de la ecuación anterior y simplificando, se llega finalmente a:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

Caso II: El triángulo es obtusángulo. De la figura 2-b, al aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos $ACD$ y $ABD$, se tiene:

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \tag{9}$$
$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \tag{10}$$

Restando la ecuación (10) de la ecuación (9) miembro a miembro:

$$b^2 - c^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2 \tag{11}$$

Del triángulo $ABD$:

$$\overline{BD} = c \cos \angle ABD = c \cos(180^\circ - B)$$

y como $\overline{DC} = a + \overline{BD} = a + c \cos(180 \circ - B)$, la ecuación (11) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$b^2 - c^2 = [a + c \cos(180 \circ - B)]^2 - c^2 \cos^2(180 \circ - B) = a^2 + 2ac \cos(180 \circ - B)$$

Despejando $b^2$ de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $\cos(180 \circ - B) = -\cos B$, se llega finalmente a:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

Las ecuaciones (3) y (5) se obtienen al aplicar el razonamiento anterior a los triángulos de la figura 2 si se les trazan perpendiculares a los lados $b$ y $c$ por los vértices $B$ y $C$. Por lo tanto, el teorema queda demostrado.

Este teorema, conocido también como las analogías de Néper para triángulos planos, dice lo siguiente: *La suma de dos lados cualquiera de un triángulo oblicuángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de sus ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semidiferencia de estos ángulos.*

Matemáticamente, el teorema se expresa, de acuerdo al triángulo de la figura 1, como:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}} \qquad \frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+A}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-A}{2}} \tag{12}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}} \qquad \frac{c+b}{c-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{C+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{C-B}{2}} \tag{13}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{C-A}{2}} \qquad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-C}{2}} \tag{14}$$

La demostración de este teorema puede hacerse tanto analíticamente como geométricamente.

*Demostración analítica*: Del teorema del seno, se sabe que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Cambiando los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

Sumando y restando uno a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} + 1 \qquad \frac{a}{b} - 1 = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} - 1$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores miembro a miembro y simplificando, se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$$

Expresando la suma y diferencia de senos del miembro derecho de la ecuación anterior como productos de senos y cosenos, se tiene[1]:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, se tiene finalmente:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$$

La segunda relación de la ecuación (12) se deduce de la ecuación anterior teniendo en cuenta que $a-b = -(b-a)$ y $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2} = -\operatorname{tg}\dfrac{B-A}{2}$, no sin antes multiplicar por $-1$ la ecuación en cuestión. Las demás relaciones se obtienen al aplicar este procedimiento a las demás proporciones dadas por el teorema del seno.

[1] Esta operación se hace mediante las fórmulas de transformación:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

En la mayoría de textos sobre trigonometría, este teorema se obtiene de la forma expuesta anteriormente, lo cual no quiere decir que no pueda deducirse mediante métodos geométricos. La prueba que se presenta a continuación[2], tiene la ventaja de encontrar geométricamente unas ecuaciones que serán útiles más adelante.

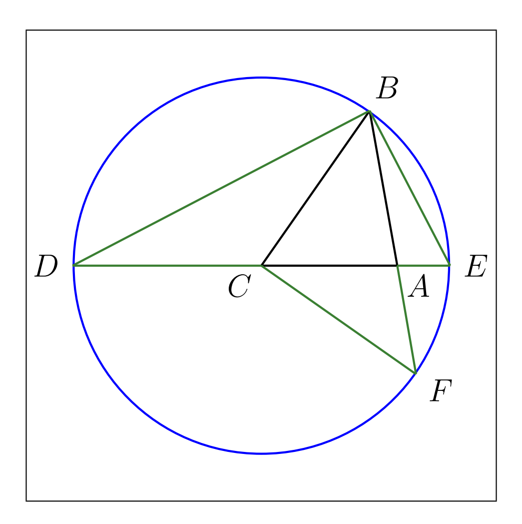



Figura 4. Construcción geométrica para la demostración del teorema de la tangente.

*Demostración geométrica*: Dado el triángulo $ABC$ (ver figura 4), donde $a > b$, se traza una circunferencia de radio $\overline{BC} = a$ y centro en $C$. Luego, se prolonga la recta $AB$ por $A$ hasta que corte la circunferencia en $F$. También se prolonga la recta $AC$ por ambos extremos hasta que alcance la circunferencia en $D$ y $E$. Finalmente, se une $C$ con $F$, $B$ con $D$, $E$ y $F$.

De la figura en cuestión, se tiene que:

El ángulo $\angle DBE$ es recto, pues está inscrito a la semicircunferencia $DFE$.

El ángulo $\angle BCD$, al ser externo al triángulo $ABC$, es igual a la suma de los ángulos $A$ y $B$; y como subtiende el arco $BD$, entonces el ángulo $\angle BED$ inscrito a este arco es la mitad del ángulo $\angle BCD$. En resumen:

$$A + B = \angle BCD = 2\angle BED \tag{15}$$

Por otro lado, al ser el ángulo $A$ externo al triángulo $ACF$, es igual a la suma de los ángulos $\angle ECF$ y $\angle AFC$; y como $\overline{CB} = \overline{CF}$, por ser radios de la circunferencia, el triángulo $BCF$ es isósceles, lo que implica que $\angle AFC = B$ y por ende $\angle ECF = A - \angle AFC = A - B$. Además, como el ángulo $\angle ECF$ subtiende el arco $EF$, entonces el ángulo $EBF$ inscrito a este arco es la mitad del ángulo $\angle ECF$. De esto se concluye que

$$A - B = \angle ECF = 2\angle EBF \tag{16}$$

De las ecuaciones (15) y (16), se obtiene:

$$\angle BED = \frac{A + B}{2} \tag{17}$$

$$\angle EBF = \frac{A - B}{2} \tag{18}$$

Los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ABD$ son complementarios de los ángulos $\angle BED$ y $\angle EBF$, respectivamente.

Aplicando el teorema del seno al triángulo $ABD$:

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}\angle ABD} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\angle ADB}$$

Como $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BC} = a + b$, $\overline{AB} = c$, $\angle ABD = 90 - \angle EBF$ y $\angle ADB = 90 - \angle BED$, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{a + b}{\cos \dfrac{A - B}{2}} = \frac{c}{\cos \dfrac{A + B}{2}} \tag{19}$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo $ABE$:

$$\frac{\overline{AE}}{\operatorname{sen}\angle EBF} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\angle BED}$$

[2] Esta demostración se tomó de [3], pág. 43–44.

Como $\overline{AE} = \overline{CE} - \overline{AC} = \overline{BC} - \overline{AC} = a - b$ y $\overline{AB} = c$, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{a-b}{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}} \tag{20}$$

Dividiendo las ecuaciones (19) y (20) miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{a+b}{\cos\dfrac{A-B}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{a-b} = \frac{c}{\cos\dfrac{A+B}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}{c}$$

Después de simplificar y agrupar términos, se obtiene finalmente:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$$

Con respecto a esta demostración, se debe hacer las siguientes observaciones:

1) Las relaciones deducidas a lo largo de la prueba son independientes de si el triángulo es acutángulo u obtusángulo. Sin embargo, la construcción depende de la condición $a > b$, lo cual implica que, para que sea completa, se debe construir un triángulo oblicuángulo tal que $a < b$, y la construcción auxiliar comienza trazando una circunferencia de radio $b$ con centro en $C$. De ahí en adelante, tanto la finalización de los trazos auxiliares como la demostración son similares a la ya presentada. Si el lector se anima a completarla, debe llegar a lo siguiente:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+A}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-A}{2}},$$

Si bien, la ecuación anterior y la deducida sean equivalentes desde el punto de vista algebraico, geométricamente no lo son. En dicho escenario, la primera solo es válida si $a > b$ y la segunda lo será si $a < b$. Aunque esto sea un detalle insignificante en la práctica, no lo es en la teoría.

2) Si se tiene en cuenta que $(A + B)/2 = 90 - C/2$, las ecuaciones (19) y (20) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{21}$$

Estas ecuaciones son un par del conjunto de relaciones conocidas como las fórmulas de Mollweide, las cuales hacen parte de un conjunto de ecuaciones usadas para verificar que los parámetros de un triángulo obtenidos a partir de otros sean los correctos. En la sección 3.6 se deducirán estas ecuaciones analíticamente.

3) Las demostraciones presentadas dan la sensación de que este teorema es una consecuencia directa o indirecta del teorema del seno. Sin embargo, esto no es así. En la literatura se encuentran demostraciones de este teorema que recurren a ingeniosas construcciones auxiliares en sus razonamientos, en las cuales no se necesita el teorema del seno. El lector interesado en algunas de ellas, puede consultar los siguientes textos: [8], pág. 138–139; [11], pág. 37 y [18], pág. 47–48.

### *3.4 Las fórmulas del ángulo medio*

Si $2p = a + b + c$, entonces en todo triángulo oblicuángulo:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \tag{22}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \tag{23}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \tag{24}$$

*Demostración:* Del teorema del coseno, ecuación (3):

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Como $2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A$ y $2\,\mathrm{sen}^2\frac{A}{2} = 1-\cos A$, se tiene:

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$$
$$\mathrm{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}$$

Como $2p = a+b+c$, entonces $b+c-a = 2(p-a)$, $a+c-b = 2(p-b)$ y $a+b-c = 2(p-c)$; las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\mathrm{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

En lo anterior, solo se tomó el signo positivo de la raiz cuadrada porque $A/2$ siempre es agudo. Las demás relaciones se obtienen aplicando el procedimiento anterior a las restantes relaciones dadas del teorema del coseno.

De las ecuaciones (22), (23) y (24), se obtienen las tangentes del ángulo medio:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
$$\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} = \frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
$$\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} = \frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Si denotamos como $r$ a la expresión

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \tag{25}$$

las ecuaciones anteriores pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \tag{26}$$
$$\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} \tag{27}$$
$$\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} \tag{28}$$

Este último conjunto de ecuaciones son las más usadas debido al cálculo previo de $r$, el cual es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $ABC$. Las fórmulas del ángulo medio, en los textos de trigonometría, se demuestran analíticamente. Sin embargo, al igual que con el teorema de la tangente, pueden encontrarse valiéndose de la geometría. Para ello, se recurrirá a la figura 5.

Al triángulo $ABC$, se trazan las bisectrices a los ángulos $A$, $B$ y $C$ hasta que se encuentren en $O$, el incentro del triángulo en cuestión. Luego, se trazan perpendiculares a $AB$, $BC$ y $CA$ por $O$ cuyos pies son $C'$, $A'$ y $B'$ respectivamente. Finalmente, se traza la circunferencia inscrita al triángulo, cuyo radio se llamará $r$. De la figura se deduce:

$\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} = r$, por ser radios de la circunferencia inscrita al triángulo $ABC$.

Los triángulos $AB'O$ y $AC'O$ son rectángulos en $B'$ y $C'$ respectivamente, pues por construcción, $OB' \perp AC$ y $OC' \perp AB$. Como $\overline{OA} = \overline{OA}$ y $\overline{OB'} = \overline{OC'}$, entonces, estos triángulos son iguales, y como consecuencia $\overline{AB'} = \overline{AC'}$.

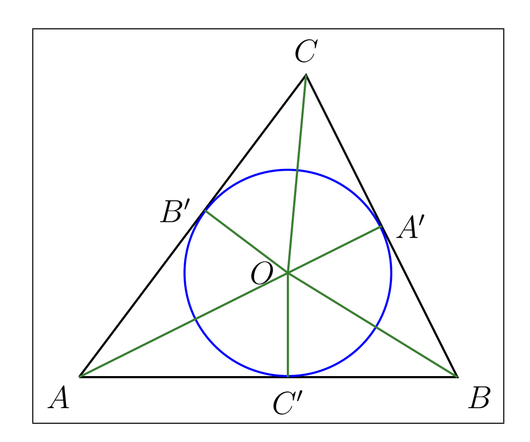



Figura 5. Construcción geométrica para la deducción de las fórmulas del ángulo medio

Los triángulos $BC'O$ y $A'BO$ son rectángulos en $C'$ y $A'$ respectivamente, pues por construcción, $OB' \perp AC$ y $OC' \perp AB$. Como $\overline{OB} = \overline{OB}$ y $\overline{OA'} = \overline{OC'}$, entonces, estos triángulos son iguales y $\overline{BC'} = \overline{BA'}$.

Los triángulos $B'CO$ y $A'CO$ son rectángulos en $B'$ y $A'$ respectivamente, pues por construcción, $OB' \perp AC$ y $OA' \perp BC$. Como $\overline{OC} = \overline{OC}$ y $\overline{OA'} = \overline{OB'}$, entonces, estos triángulos son iguales y $\overline{CB'} = \overline{CA'}$.

Si el perímetro se denota como $2p$, entonces:

$$\overline{AC'} + \overline{BC'} + \overline{BA'} + \overline{CA'} + \overline{CB'} + \overline{AB'} = 2p,$$

y teniendo en cuenta que $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, $\overline{BC'} = \overline{BA'}$ y $\overline{CB'} = \overline{CA'}$, se tiene:

$$\overline{AB'} + \overline{BC'} + \overline{CA'} = p. \tag{29}$$

Por otro lado:

$$c = \overline{AC'} + \overline{BC'} = \overline{AB'} + \overline{BC'} \tag{30}$$
$$b = \overline{AB'} + \overline{CB'} = \overline{AB'} + \overline{CA'} \tag{31}$$
$$a = \overline{BA'} + \overline{CA'} = \overline{BC'} + \overline{CA'} \tag{32}$$

Combinando las ecuaciones (29), (30), (31) y (32), se obtiene:

$$\overline{AB'} = \overline{AC'} = p - a \tag{33}$$
$$\overline{BC'} = \overline{BA'} = p - b \tag{34}$$
$$\overline{CB'} = \overline{CA'} = p - c \tag{35}$$

De los triángulos $AB'O$, $BC'O$ y $CA'O$, se deduce:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{AB'}} = \frac{r}{p-a}$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{BC'}} = \frac{r}{p-b}$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{CA'}} = \frac{r}{p-c}$$

Las ecuaciones anteriores son las tangentes de los ángulos medios del triángulo $ABC$. Para encontrar el radio de la circunferencia inscrita, se aplica el teorema del seno al triángulo $ABO$:

$$\overline{OA} = \frac{c \operatorname{sen}\dfrac{B}{2}}{\operatorname{sen}\left(180^\circ - \dfrac{A+B}{2}\right)} = \frac{c \operatorname{sen}\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}, \tag{36}$$

y también se aplica el teorema del seno al triángulo $ACO$:

$$\overline{OA} = \frac{b \operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}{\operatorname{sen}\left(180^\circ - \dfrac{A+C}{2}\right)} = \frac{c \operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{37}$$

Multiplicando las ecuaciones (36) y (37), y empleando las relaciones encontradas para las tangentes de los ángulos medios, se tiene:

$$\overline{OA}^2 = bc \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{bcr^2}{(p-b)(p-c)} \tag{38}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $AB'O$:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{OB'}^2 \quad \therefore \quad \frac{bcr^2}{(p-b)(p-c)} = (p-a)^2 + r^2$$

Despejando $r^2$:

$$r^2 = (p-a)^2\frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-b)(p-c)} = (p-a)^2\frac{(p-b)(p-c)}{p(b+c-p)} = (p-a)^2\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}.$$

De la ecuación anterior se encuentra que $r$ es igual a:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

Expresión que coincide con la ecuación (25). Teniendo en cuenta las ecuaciones (25), (33) y (38), se deduce del triángulo $AB'O$:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{OA}} = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bcr^2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = r\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bcr^2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Las relaciones para los ángulos restantes se encuentran examinando los triángulos $BC'O$ y $CA'O$, no sin antes de haber encontrado relaciones similares a $\overline{OA}$ para $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

La demostración anterior se basó sobre un triángulo acutángulo. Para un triángulo obtusángulo, tanto la construcción como la cadena de razonamientos usados no cambia, por ello, no se presenta aquí.

### *3.5 Las fórmulas de la proyección*

En todo triángulo oblicuángulo:

$$a = b\cos C + c\cos B \tag{39}$$
$$b = c\cos A + a\cos C \tag{40}$$
$$c = a\cos B + b\cos A \tag{41}$$

Demostración: La prueba se divide, como de costumbre, en dos casos:

Caso I: El triángulo es acutángulo. De la figura 2-a: $a = \overline{BD} + \overline{DC}$. De los triángulos $ABD$ y $ACD$, se tiene que $\overline{BD} = c\cos B$ y $\overline{DC} = b\cos C$, respectivamente. De lo anterior se obtiene que

$$a = \overline{BD} + \overline{DC} = b\cos C + c\cos B$$

Caso II: El triángulo es acutángulo. De la figura 2-b: $a = \overline{DC} - \overline{DB}$. De los triángulos $ABD$ y $ACD$, se tiene que $\overline{DB} = c\cos(180 - B)$ y $\overline{DC} = b\cos C$, respectivamente. De lo anterior se obtiene que

$$a = \overline{DC} - \overline{DB} = b\cos C - c\cos(180 - B) = b\cos C + c\cos B$$

Si se trazan perpendiculares a los lados $b$ y $c$ por los vértices $B$ y $C$, y siguiendo el razonamiento anterior, se llegan a las demás relaciones. Gracias a ello, el teorema queda demostrado.

### *3.6 Las fórmulas de Mollweide*

En todo triángulo oblicuángulo:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \tag{42}$$

$$\frac{b+a}{c}=\frac{\cos\dfrac{B-A}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} \qquad \frac{b-a}{c}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{43}$$

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}} \qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{B-C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \tag{44}$$

$$\frac{c+b}{a}=\frac{\cos\dfrac{C-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}} \qquad \frac{c-b}{a}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{C-B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \tag{45}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\dfrac{A-C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}} \qquad \frac{a-c}{b}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{46}$$

$$\frac{c+a}{b}=\frac{\cos\dfrac{C-A}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}} \qquad \frac{c-a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{C-A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{47}$$

Demostración: Al reescribir el teorema del seno de la siguiente manera:

$$\frac{a}{c}=\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}C} \qquad \frac{b}{c}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C},$$

entonces, sumando y restando ambas ecuaciones miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}$$

Transformando las sumas y diferencias de senos en productos y expresando $\operatorname{sen}C$ en términos de $C/2$:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

Como $A+B=180-C$, entonces $\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ y $\cos\frac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. Con esto en mente, se tiene finalmente que

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$$

De esta manera, se obtuvieron las ecuaciones (42). La primera de las ecuaciones (43) se obtiene al cambiar el orden de los sumandos del numerador de la fracción del primer miembro y reemplazando $\cos\dfrac{A-B}{2}$ por $\cos\dfrac{B-A}{2}$ en la primera de las ecuaciones (42); mientras que la segunda surge al reemplazar respectivamente a $a-b$ y $\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}$ por $-(b-a)$ y $-\operatorname{sen}\dfrac{B-A}{2}$ en la segunda de las ecuaciones (43), ecuación a la cual se multiplico por $-1$ previamente. Las demás relaciones se encuentran mediante manipulaciones similares a las diversas proporciones dadas por el teorema del seno. De esta forma, el teorema queda demostrado. En la sección 3.3, se indicó co'mo se encontraban las ecuaciones (42) de forma geométrica. Las ecuaciones (43) se deducen para el caso $b>a$, el cual se dejó como ejercicio para el lector.

## 4. Solución de los diferentes casos

Una vez establecidos los teoremas necesarios, ahora se mostrará su uso para resolver triángulos oblicuángulos. La discusión de cada caso comienza con un tratamiento analítico detallado tanto en el cómo se obtienen los parámetros restantes como en metodologías para corrobarlos. Al final de cada uno, se ilustra su solución mediante construcciones geométricas.

Supóngase conocidos los ángulos $B$ y $C$ junto con el lado $a$. Como la suma de los tres ángulos internos es igual a dos rectos, el ángulo restante será el suplemento de la suma de los ángulos conocidos, es decir:

$$A = 180^\circ - (B + C). \tag{48}$$

Una vez conocido el ángulo $A$, los lados restantes se obtienen mediante el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \therefore \quad b = a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \tag{49}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \therefore \quad c = a\,\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \tag{50}$$

Las ecuaciones (48), (49) y (50) proporcionan un solo valor para $A$, $b$ y $c$. Por lo tanto, el primer caso está resuelto. Para comprobar que los parámetros están correctamente calculados, se puede acudir ya sea a las fórmulas de la proyección o las de Mollweide. Si se usan las primeras, la ecuación (39) será la indicada; pero si se quieren emplear las segundas, las ecuaciones (44) o (45) son las idóneas, siempre y cuando se reescriban de la siguiente manera:

$$(b + c)\operatorname{sen}\frac{A}{2} = a\cos\frac{B - C}{2} \qquad (b - c)\cos\frac{A}{2} = a\operatorname{sen}\frac{B - C}{2} \tag{51}$$

$$(c + b)\operatorname{sen}\frac{A}{2} = a\cos\frac{C - B}{2} \qquad (c - b)\cos\frac{A}{2} = a\operatorname{sen}\frac{C - B}{2} \tag{52}$$

Cualquiera de las cuatro ecuaciones anteriores sirve para verificar la rectitud de los parámetros calculados. El lector debe notar que la elección de estas relaciones de Mollweide es totalmente arbitraria, lo cual permite escoger a su gusto cualquiera de las enunciadas en la sección donde fueron presentadas.

Geométricamente, el triángulo se construye de la siguiente manera: se traza un segmento $\overline{BC}$ de longitud $a$. Por los extremos $B$ y $C$, se construyen semirrectas $r$ y $s$ tales que formen ángulos $B$ y $C$ con el segmento trazado. Finalmente, se prolongan las semirectas hasta que se corten en un punto $A$, lo cual forma el triángulo $ABC$. Al cumplir este las condiciones del problema, se tiene finalmente el triángulo deseado (ver figura 6).

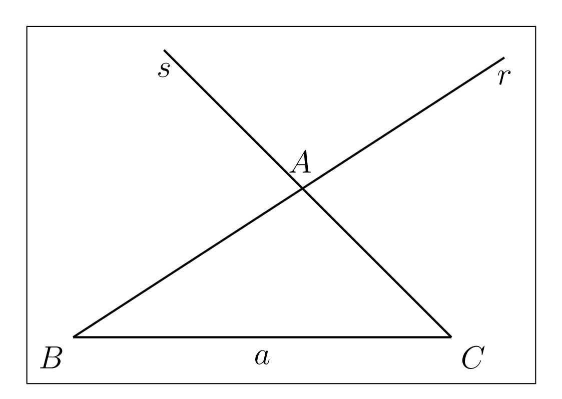



Figura 6. Construcción geométrica del triángulo para el primer caso.

### 4.2 Segundo caso: cuando se conocen dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos

Supóngase conocidos los ángulos $A$ y $B$ junto al lado $a$. De la propiedad de los ángulos internos de un triángulo se deduce que el ángulo restante es igual a:

$$C = 180^\circ - (A + B). \tag{53}$$

Los lados que faltan se calculan mediante la aplicación del teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \therefore \quad b = a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \tag{54}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \therefore \quad c = a\,\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \tag{55}$$

Las ecuaciones (53), (54) y (55) proporcionan un solo valor para $C$, $b$ y $c$. Con esto se soluciona el segundo caso. Al igual que en el caso anterior, es indispensable corroborar los resultados obtenidos, lo cual se realiza mediante las fórmulas de la proyección (de las

cuales, la ecuación (39) es la indicada) o usando una de las relaciones de Mollweide, ya sea las que están en las ecuaciones (51) y (52), o cualquiera de las que están enlistadas en la sección 3.6

Para construir geométricamente el triángulo bajo estas condiciones, se emplea el siguiente proceder: se traza un segmento $\overline{BC}$ de longitud $a$. Por el extremo $B$, se construye la semirrecta $t$ tal que forme un ángulo $B$ con el segmento trazado. En un punto cualquiera de $t$, se traza una recta $u$ tal que forme un ángulo $A$ con ella. Hecho esto, se traza una recta $v$ paralela a $u$ que pase por $C$ y que cortará a $t$ en el punto $A$, dando origen al triángulo $ABC$. Al cumplir este las condiciones del problema, se tiene finalmente el triángulo deseado (ver figura 7).

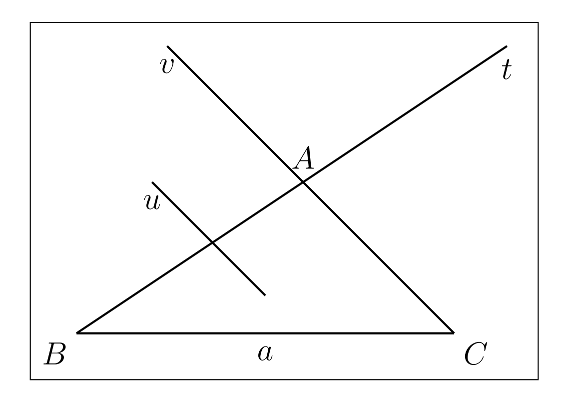



Figura 7. Construcción geométrica del triángulo para el segundo caso.

### *4.3 Tercer caso: cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos*

Supóngase conocidos los lados $a$ y $b$ con el ángulo $A$. Entonces el ángulo opuesto al lado $B$ se obtiene a partir del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \therefore \quad \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \tag{56}$$

Dependiendo de los valores de $a$, $b$ y $A$, se puede tener uno, dos o ningun valor para $B$. Para ello, se analizan los siguientes casos:

i) $a > b$: Sin importar si $A$ sea agudo u obtuso, de la ecuación (56) se deduce que $\operatorname{sen} B < 1$, porque $a > b > b \operatorname{sen} A$, lo que significa que $B$ puede tomar dos valores, los cuales son suplementarios entre ellos. Como $a > b$, se tiene de las propiedades de los triángulos que $A > B$. De esto se deduce que si $A$ es agudo, $B$ también lo será y si $A$ es obtuso, $B$ tiene que ser forzosamente agudo. Por lo tanto, se tendrá un solo triángulo que cumpla las condiciones dadas.

ii) $a < b$: En este caso, la ecuación (56) indica que $\operatorname{sen} B$ puede ser mayor, igual o menor que uno. En el primer escenario, $b \operatorname{sen} A > a$, lo cual implica que no existe un triángulo ; en el segundo escenario, si $A$ es agudo, $b \operatorname{sen} A = a$, y $B$ será de $90°$: se tendrá un triángulo recto, pero si $A$ es obtuso, el problema no tiene solución, pues al ser $A > B$, implica a su vez que $a > b$, contradicciendo así la restricción original; en el último escenario, $b \operatorname{sen} A < a$, y $B$ puede tomar dos valores: como $a < b$ exige que $A < B$, entonces si $A$ es agudo se tendrán dos triángulos cuyos ángulos opuestos al lado $b$ son suplementarios y si $A$ es obtuso, se tendrá un triángulo cuyo ángulo opuesto al lado $b$ sea agudo.

iii) $a = b$: En este caso, se tendrá un triángulo si $A$ es agudo, el cual es isósceles; y si $A$ es obtuso, el problema no tiene sentido, pues un triángulo no puede tener dos ángulos obtusos.

Una vez se determine $B$, el resto de parámetros se encuentran de la siguiente forma:

Si solo se tiene un valor para $B$, entonces el ángulo restante se deriva de la relación entre los ángulos internos de un triángulo:

$$C = 180° - (A + B); \tag{57}$$

y el lado restante se obtiene del teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \therefore \quad c = a\,\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}; \tag{58}$$

Si se tienen dos valores para $B$, los cuales se denominarán $B_1$ y $B_2$, entonces, los ángulos restantes para cada triángulo se deducen de una forma similar a la ya presentada, es decir:

$$C_1 = 180° - (A + B_1), \tag{59}$$

$$C_2 = 180° - (A + B_2); \quad (60)$$

y los lados restantes se obtienen del teorema del seno:

$$c_1 = a\,\frac{\operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A} \quad (61)$$

$$c_2 = a\,\frac{\operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A} \quad (62)$$

Para verificar que los resultados obtenidos son los correctos, se usa una de las fórmulas de Mollweide. Se debe insistir que su elección es libre.

La construcción geométrica de este caso permite visualizar fácilmente los casos en los cuales se tiene una, dos o ninguna solución. Independientemente de si el ángulo opuesto dado sea agudo u obtuso, la construcción, suponiendo dados $A$, $a$ y $b$, comienza al trazar el ángulo $A$. En uno de sus lados, se ubica un punto $C$ tal que su distancia a su vértice sea $b$. Desde este punto, se baja una perpendicular al lado restante cuyo pie es $D$. Con centro en $C$ y radio $a$, se traza un arco tal que corte a la recta $AE$, intersección que dependerá de la magnitud de $A$ y de la relación de $a$ y $CD$.

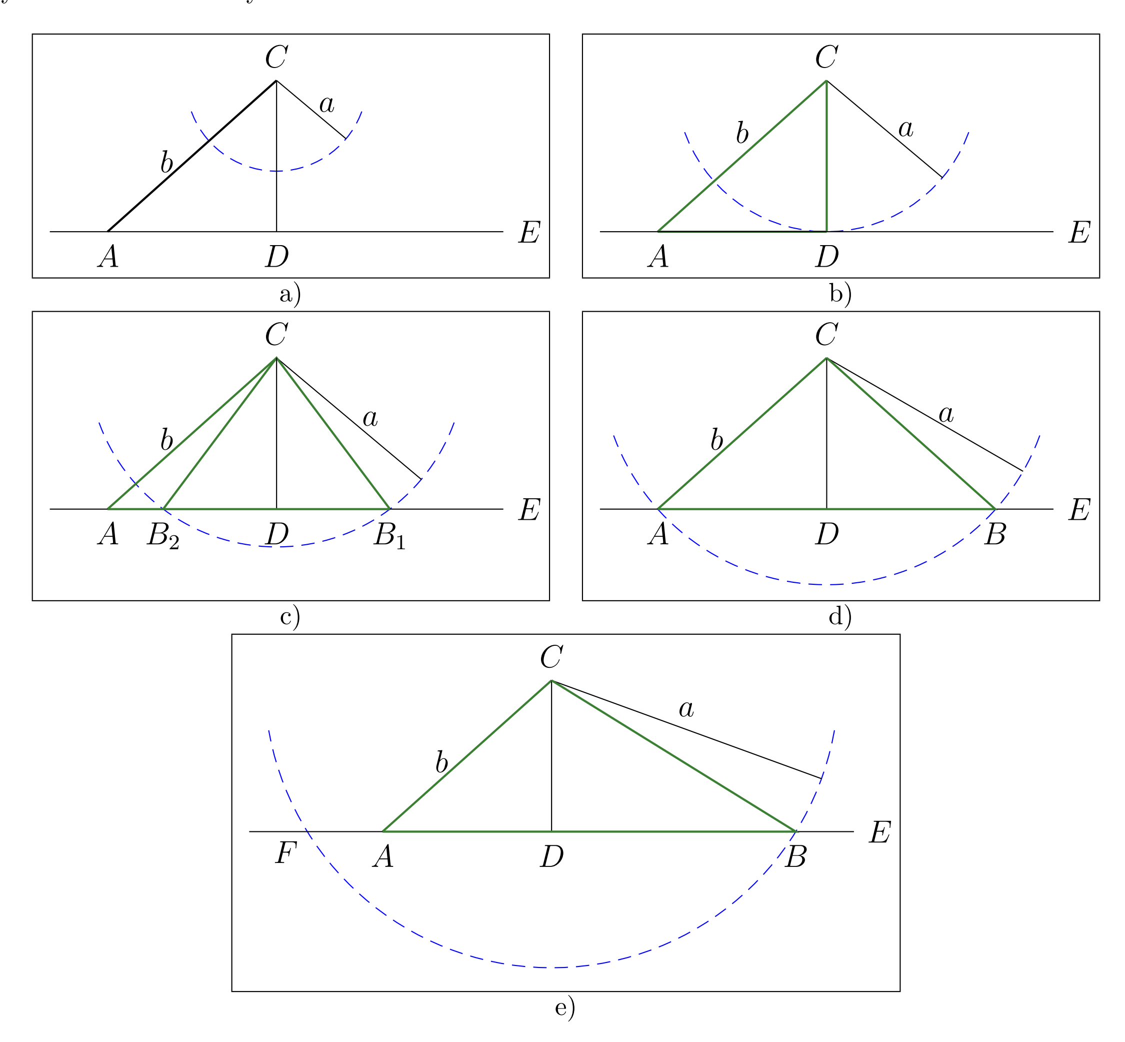



Figura 8. Construcción geométrica del tercer caso cuando el ángulo opuesto dado es agudo.

Cuando $A$ es agudo:

Si $a < \overline{CD}$, el arco no cortará a $AE$ y no se tendrá solución alguna (ver figura 8-a);

Si $a = \overline{CD}$, el arco será tangente a $AE$, y la solución será el triángulo $ACD$ (ver figura 8-b) ;

Si $a > \overline{CD}$ y $a < b$, el arco cortará a $AE$ en los puntos $B_1$ y $B_2$. En este caso, se tendrán dos soluciones materializadas en los triángulos $AB_1C$ y $AB_2C$ (ver figura 8-c);

Si $a > \overline{CD}$ y $a = b$, el arco cortará a $AE$ en los puntos $A$ y $B$. En este caso, la solución será el triángulo isósceles $ABC$ (ver figura 8-d);

Si $a > \overline{CD}$ y $a > b$, el arco cortará a $AE$ en los puntos $B$ y $F$. Sin embargo, de los dos triángulos que podrían formarse, el triángulo $ABC$ cumple con las condiciones impuestas por el segundo caso, lo cual lo convierte en la solución buscada (ver figura 8-e).

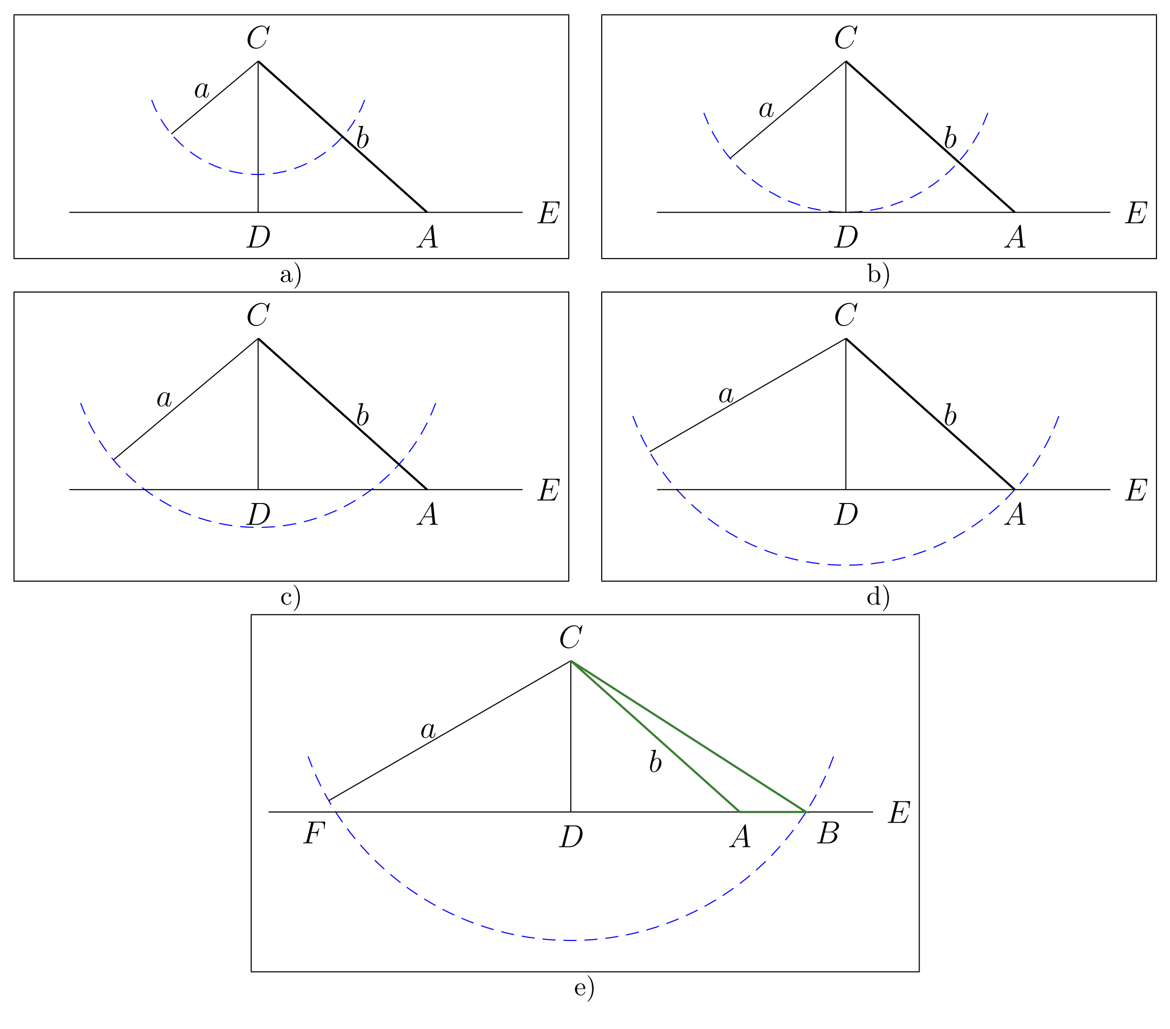



Figura 9. Construcción geométrica del tercer caso cuando el ángulo dado es obtuso.

Cuando $A$ es obtuso:

Ya sea que si $a < \overline{CD}$, $a = \overline{CD}$, $\overline{CD} < a < b$; y $\overline{CD} < a = b$, no existe un triángulo que cumpla las condiciones del caso tres, tal y como lo ilustran los cuadros a), b), c) y d) de la figura 9. Sin embargo, cuando $a > b$, el arco en cuestión intersecta a la recta $AE$ en los puntos $B$ y $F$, de los cuales solo el primero hace parte del vértice del triángulo $ABC$. Este triángulo satisface los requisitos del tercer caso.

Con esta discusión geométrica, se corroboran las conclusiones obtenidas por medios analíticos en cuanto a la cantidad de soluciones que pueden presentarse de acuerdo a los valores de los parámetros dados.

### *4.4 Cuarto caso: cuando se conocen dos casos y el ángulo comprendido entre ellos*

Supóngase dados los lados $a$ y $b$ con el ángulo $C$. Entonces el lado $c$ se calcula usando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \therefore \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \tag{63}$$

Los ángulos restantes se calculan a partir del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \therefore \quad \operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{c} \tag{64}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \therefore \quad \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} C}{c} \tag{65}$$

Las ecuaciones (64) y (65) indican que los senos de $A$ y $B$ pueden ser mayores, iguales o menores que uno. Para el caso en cuestión, estos son menores que uno. Para asegurar esto, se puede ver en la figura 2-a que, en el triángulo recto $ABD$, la hipotenusa $c$ es mayor que $\overline{BD} = b \operatorname{sen} C$, por ser el lado que opone el mayor ángulo, lo cual garantiza que $\overline{BD}/c = \operatorname{sen} B$ sea menor que uno, si $C$ es águdo. Un razonamiento similar en la figura 2-b revela que $\overline{BD}/c = \operatorname{sen} B$ es menor que uno para $C$ obtuso. Si en dichos triángulos se traza la altura con respecto a $B$, y efectuando un análisis paralelo al anterior, se concluirá que $\operatorname{sen} A < 1$, ya sea que $C$ sea agudo u obtuso.

Por otro lado, $\operatorname{sen} A$ y $\operatorname{sen} B$ proporcionan dos valores tanto para $A$ como para $B$, lo cual conduciría a más de una solución. A continuación, se muestra que siempre es posible escoger un valor para $A$ y uno para $B$. Si $C < 90°$, de la relación de los ángulos internos de un triángulo se deduce que $A + B > 90°$. Esta última desigualdad implica tres opciones: $A$ y $B$ son agudos; $A$ es obtuso y $B$ es agudo o, $A$ es agudo y $B$ es obtuso. Para escoger la correcta, basta utilizar el hecho de que el mayor (menor) lado opone mayor (menor) ángulo. Entonces, ordenando los lados de forma descendente (o ascendente), se elige los valores de los ángulos opuestos a estos que cumplan dicho orden. Si $C > 90°$, entonces $A + B < 90°$, lo cual implica que $A$ y $B$ deben ser agudos. De esta forma, se asegura que el tercer caso tiene una solución. Para comprobar que la solución es correcta, la suma de los ángulos internos debe ser de 180°.

El procedimiento expuesto anteriormente es quiza, el más empleado. Sin embargo, existe más de una forma de lidiar con este caso. El método expuesto a continuación usa el teorema de la tangente. Un primer vistazo al teorema muestra que no es posible usarlo, pues no se conoce los ángulos opuestos a los lados dados; pero, como se conoce el ángulo comprendido entre ellos, de la relación de los ángulos internos de un triángulo, se deduce fácilmente que el suplemento del ángulo conocido es igual a la suma de los ángulos restantes. En conclusión, el teorema de la tangente proporciona la semidiferencia de los ángulos opuestos de los lados dados. Si se suponen conocidos los lados $a$, $b$ y el ángulo $C$, entonces:

La suma de los ángulos iguales es igual a: $A + B = 180° - C$, y del teorema de la tangente, se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}} \quad \therefore \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \tag{66}$$

La semidiferencia de los ángulos opuestos será positiva y estará comprendida entre 0 y 90° si $a > b$; será negativa si $a < b$ y estará comprendida entre $-90°$ y 0; y será nula si $a = b$. Si se denomina a $\delta$ a la semidiferencia en cuestión, los ángulos se obtienen así:

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = 180° - C + \delta \tag{67}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = 180° - C - \delta \tag{68}$$

El lado $c$ se obtiene a partir del teorema del seno:

$$c = a\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = b\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \tag{69}$$

Para verificar que los resultados son correctos para este método expuesto, se puede usar una de las relaciones de Mollweide.

Para finalizar, se muestra cómo se construye el triángulo conocidos dos lados $a$ y $b$ y el ángulo comprendido entre ellos $C$: se traza el ángulo $C$, y a partir de su vértice, se ubican sobres sus lados dos puntos $A$ y $B$ tales que $\overline{AC} = b$ y $\overline{BC} = a$. Hecho esto, se une con una recta los puntos en cuestión. El triángulo $ABC$ es el deseado (ver figura 10).

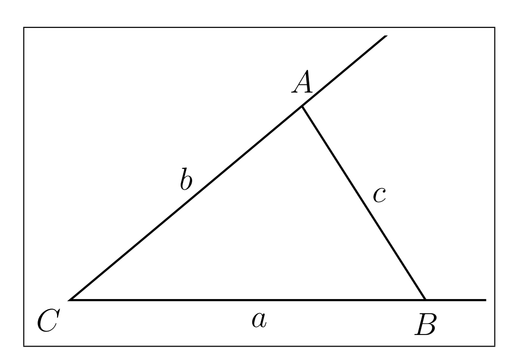



Figura 10. Construcción geométrica del triángulo para el cuarto caso.

### *4.5 Quinto caso: cuando se conocen los tres lados*

Si se conocen los tres lados, entonces del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \therefore \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{70}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \quad \therefore \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \tag{71}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{72}$$

Para mirar cuándo se tiene una solución o ninguna, se analizará la ecuación (70). Si existe una solución, entonces $\cos A$ es menor que uno pero mayor a menos uno:

$$-1 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 1 \tag{73}$$

Después de algunas manipulaciones, la desigualdad anterior se puede escribir como:

$$(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2$$

Tomando raíz cuadrada a los miembros de la desigualdad anterior, se tiene:

$$|b-c| < a < b+c \tag{74}$$

La relación anterior plasma la conocida relación entre los lados de un triángulo: La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercero, pero menor que su diferencia. Un análisis similar para $\cos B$ y $\cos C$ conduce a la misma conclusión. En resumen, dados los tres lados de un triángulo, se tendrá una solución si se satisfacen las desigualdades:

$$|b-c| < a < b+c \tag{75}$$

$$|c-a| < b < c+a \tag{76}$$

$$|a-b| < c < a+b \tag{77}$$

Otra forma de resolver este caso es usando las fórmulas del ángulo medio. Si solo se desea conocer los ángulos, entonces:

Se calcula el semiperímetro $p = (a+b+c)/2$ y luego, se puede escoger las fórmulas que proporcionan los senos de los ángulos medios:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \tag{78}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \tag{79}$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \tag{80}$$

o las que dan los cosenos de los ángulos medios:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \tag{81}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \tag{82}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \tag{83}$$

Si además de los ángulos, se quiere saber el radio de la circunferencia inscrita al triángulo que se quiere resolver, entonces se usan las ecuaciones de las tangentes de los ángulos medios:

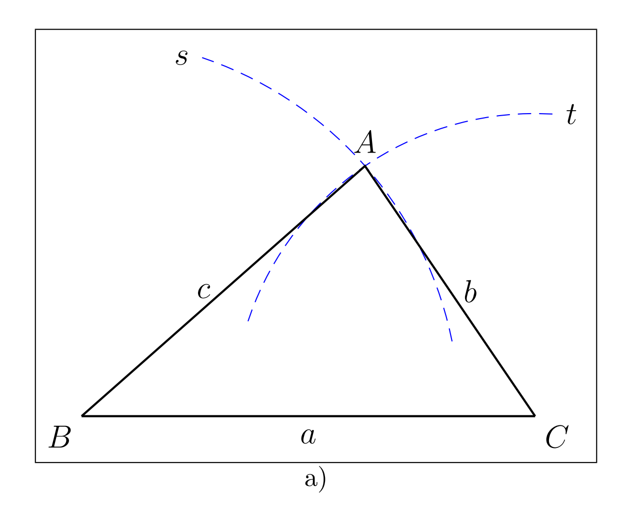
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \tag{84}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} \tag{85}$$

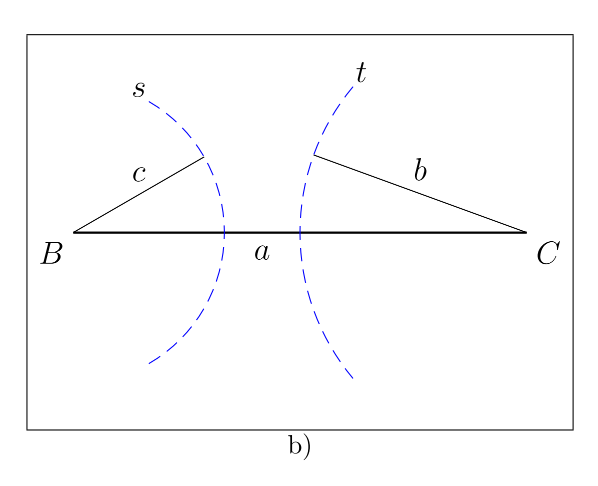
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} \tag{86}$$

donde $r$ está dado por la ecuación (25). Si se quiere saber si se puede resolver o no el triángulo, las ecuaciones anteriores indican que el semiperímetro debe ser mayor que los tres lados. Esta condición es más sencilla que la dada por las relaciones (75), (76) y(77). Para verificar que los resultados son correctos para los dos métodos expuestos, la suma de los tres ángulos debe ser de 180°.

La construcción geométrica para este caso es la siguiente: Se traza un segmento $\overline{BC}$ de longitud $a$. Se trazan arcos $s$ y $t$ hacia un mismo lado de $BC$ con centros en $B$ y $C$ y radios respectivos $c$ y $b$. Si estos arcos se intersectan en un punto $A$, el triángulo formado al unir los puntos $A$, $B$ y $C$ es el buscado, lo cual sucederá si la suma de los radios de los arcos es mayor que la separación de sus centros (ver figura 11-a). Si esto no llegase a suceder, no se obtendrá un triángulo que tenga por lados de longitud $a$, $b$ y $c$ (ver figura 11-b).



a)



b)

Figura 11. Construcción geométrica del triángulo para el quinto caso: a) cuando la suma de los dos lados es mayor que el tercero; b) cuando la suma de los dos lados es menor o igual al lado restante.

### *4.6 Otros casos de resolución de triángulos*

Además de los ya expuestos, existen otros cuyos parámetros dados pueden ser la suma de dos lados, uno o dos ángulos exteriores, el perímetro o el área del triángulo, las alturas, las bisectrices, etc. A continuación, se analizarán dos casos en particular: dado los ángulos internos y el perímetro; y dado un lado, su correspondiente ángulo opuesto y la suma de los lados restantes.

*4.6.1 Dado los ángulos internos y el perímetro:* Este caso puede resolverse de dos maneras. La primera consiste en usar las ecuaciones de las tangentes de los ángulos medios. Utilizando las ecuaciones (25)–(28), se forman las siguientes relaciones:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r^2}{(p-a)(p-b)}=1-\frac{c}{p} \tag{87}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}=1-\frac{a}{p} \tag{88}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r^2}{(p-c)(p-a)}=1-\frac{b}{p} \tag{89}$$

Despejando $a$, $b$, y $c$ de las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$a=p\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \tag{90}$$

$$b=p\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \tag{91}$$

$$c=p\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) \tag{92}$$

Para probar que los resultados dados por las ecuaciones (90), (91) y (92) son correctos, basta con comprobar que $a+b+c=2p$. La segunda forma de atacar este problema es usando el teorema del seno. Empleando las propiedades de las proporciones[3], se tiene que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}=\frac{a+b+c}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}=\frac{2p}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C} \tag{93}$$

De este conjunto de ecuaciones se obtiene:

$$a=\frac{2p\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C} \tag{94}$$

$$b=\frac{2p\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C} \tag{95}$$

[3] Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$, entonces

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$$

$$c = \frac{2p \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} \tag{96}$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}, \quad A + B + C = 180^\circ \tag{97}$$

Las ecuaciones (94), (95) y (96) se pueden rescribir de la siguiente manera:

$$a = \frac{2p \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} = \frac{p \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} \tag{98}$$

$$b = \frac{2p \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2}}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} = \frac{p \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2}} \tag{99}$$

$$c = \frac{2p \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2}}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} = \frac{p \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2}} \tag{100}$$

El resultado es correcto si $a + b + c = 2p$. El teorema del seno reduce este problema a uno de reparto proporcional.

*4.6.2 Dado un lado, su correspondiente ángulo opuesto y la suma de los lados restantes:* Supóngase conocidos $a$, $A$ y $b+c$. De la formula de Mollweide

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$$

se deduce que[4]

$$\frac{B-C}{2} = \pm \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{101}$$

Como $\dfrac{B+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$, al combinar esta relación con la ecuación (101) se obtiene:

$$B = 90^\circ - \frac{A}{2} \pm \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{102}$$

$$C = 90^\circ - \frac{A}{2} \mp \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{103}$$

Estas ecuaciones indican que se tienen dos soluciones: un triángulo cuyos ángulos adyacentes al lado dado son

$$B_1 = 90^\circ - \frac{A}{2} + \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \quad C_1 = 90^\circ - \frac{A}{2} - \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{104}$$

y el otro tiene como ángulos adyacentes al susodicho lado

$$B_2 = 90^\circ - \frac{A}{2} - \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \quad C_2 = 90^\circ - \frac{A}{2} + \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{105}$$

Al comparar las ecuaciones (104) y (105), se tiene que $B_1 = C_2$ y $B_2 = C_1$. Como ambos triángulos tienen un lado respectivo igual y sus correspondientes ángulos adyacentes a ese lado iguales, por congruencia de triángulos, estos son iguales. Esto implica que se tiene una sola solución. Por lo tanto, los ángulos buscados son:

$$B = 90^\circ - \frac{A}{2} + \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{106}$$

$$C = 90^\circ - \frac{A}{2} - \arccos\left(\frac{b+c}{a} \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \tag{107}$$

[4]El signo $\pm$ en la ecuación (101) refleja que se desconoce si $B$ es mayor o menor que $C$.

Nótese que su elección es arbitraria, pudiendose elegir la otra solución. Una vez determinado los ángulos, sus lados opuestos respectivos se obtienen mediante el teorema del seno:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \tag{108}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \tag{109}$$

Las ecuaciones (106) y (107) muestran que no siempre se tiene una solución para todos los valores de $a$, $b+c$ y $A$. Primero, debe tenerse en cuenta que siempre $b+c > a$. Esto significa que el termino $\frac{b+c}{a} \operatorname{sen} \frac{A}{2}$ no siempre es menor o igual uno. Luego, para tener una solución, se debe cumplir que

$$\frac{b+c}{a} \operatorname{sen} \frac{A}{2} \leq 1 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c} \tag{110}$$

La construcción geométrica de este caso descansa en que, independientemente del valor de $A$ que satisfaga la desigualdad anterior y al ser la suma de los lados desconocidos constante, todos los vértices opuestos al lado dado están en una elipse cuyos focos son los extremos de dicho lado. Dicha elipse tiene como semieje mayor $a' = \frac{b+c}{2}$, semidistancia focal $c' = \frac{a}{2}$ y semieje menor $b' = \sqrt{a'^2 - c'^2}$. Entonces, si se logra encontrar geométricamente un punto de la elipse tal que sus radio vectores formen un ángulo $A$, el triángulo podrá construirse.

Para ello, se establecerá una relación entre este ángulo y un parámetro de la elipse que sea fácil de interpretar, en este caso, su anomalía excéntrica. Con este fin, se ubica la elipse en un sistema cartesiano de coordenadas tal que el origen esté en el punto medio del lado $BC$ y los ejes $x$ y $y$ coincidirá y será perpendicular a él, respectivamente. Adicional a ello, se traza su circunferencia auxiliar. Lo descrito anteriormente se muestra en la figura 12.

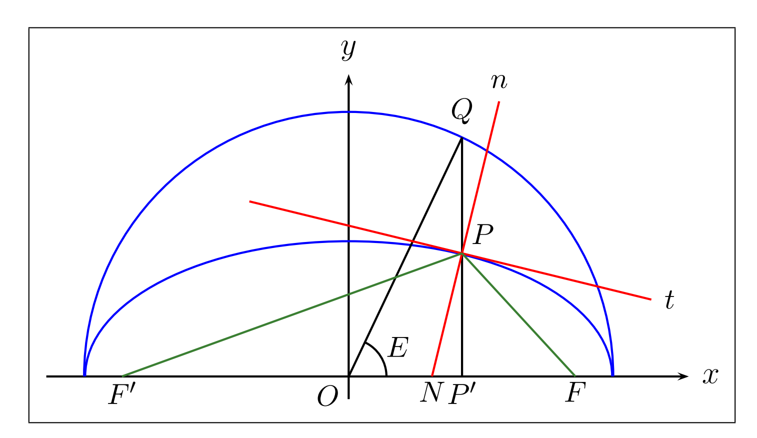



Figura 12. Construcción para determinar una relación entre el ángulo $A$ y la anomalía excéntrica de la elipse asociada al triángulo buscado

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la elipse y $Q$ su punto asociado a la circunferencia auxiliar. Sea $F$ y $F'$ los focos de la elipse cuyas coordenadas son $(c', 0)$ y $(-c', 0)$; $n$ y $t$ son respectivamente, la recta normal y tangente a la elipse en el punto $P$. El ángulo $\angle FPF'$ se denotará como $\alpha$ y el ángulo $\angle QON$ es la anomalía excéntrica $E$ correspondiente al punto $P$. Se sabe por geometría analítica que las pendientes de las rectas normal $m_n$ y tangente $m_t$ a la elipse en $P$ son[5]:

$$m_t = -\frac{b'^2 x_0}{a'^2 y_0} \tag{111}$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{a'^2 y_0}{b'^2 x_0} \tag{112}$$

Las pendientes de las rectas $PF$ y $PF'$ son:

$$m_{PF} = \frac{y_0}{x_0 - \frac{a}{2}} \tag{113}$$

$$m_{PF'} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{a}{2}} \tag{114}$$

[5] Aunque estos resultados pueden obtenerse mediante las técnicas del cálculo diferencial, también pueden derivarse usando métodos algebraicos. En [17], se expone un método basado en usar ecuaciones paramétricas de la recta para analizar su intersección con una cónica. En particular, en el capítulo 8, se efectua dicho análisis para la elipse.

Se sabe por las propiedades de la elipse que el ángulo que forma los radio vectores de una elipse en un punto de ella lo biseca la recta normal a la elipse en ese punto[6]. Con ello, se puede calcular la tangente de la mitad de ese ángulo a partir de las pendientes de la normal y de uno de los radio vectores, es decir:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m_n - m_{PF'}}{1 + m_n m_{PF'}} = \frac{\dfrac{a'^2 y_0}{b'^2 x_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + \dfrac{a}{2}}}{1 + \dfrac{a'^2 y_0^2}{b'^2 x_0\left(x_0 + \dfrac{a}{2}\right)}} = \frac{(a'^2 - b'^2)x_0 y_0 + \dfrac{a}{2}a'^2 y_0}{b'^2 x_0^2 + a'^2 y_0^2 + \dfrac{a}{2}b'^2 x_0}$$

Como $a'^2 - b'^2 = c'^2$ y como $x_0$ y $y_0$, al ser coordenadas de un punto de la elipse, se cumple que $b'^2 x_0^2 + a'^2 y_0^2 = a'^2 b'^2$, entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{y_0\left(c'^2 x_0 + \dfrac{a}{2}a'^2\right)}{b'^2\left(a'^2 + \dfrac{a}{2}x_0\right)} = \frac{y_0\left(\dfrac{a^2}{4}x_0 + \dfrac{a}{2}a'^2\right)}{b'^2\left(a'^2 + \frac{a}{2}\,x_0\right)} = \frac{a/2}{b'^2}y_0$$

Como $y_0 = b' \operatorname{sen} E$ y $b' = \sqrt{a'^2 - c'^2} = \sqrt{\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ se tiene finalmente que

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{\sqrt{\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}\operatorname{sen} E = \frac{\dfrac{a}{b+c}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2}}\operatorname{sen} E \tag{115}$$

De esta ecuación se deduce que, cuando $0 \leq E \leq 180°$,

$$0 \leq \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\dfrac{a}{b+c}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2}}$$

o, en términos de $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$,

$$0 \leq \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

La última desigualdad da una condición para la existencia de una solución en este caso. Sea $\phi$ el ángulo que forma el semieje menor con uno de los radio vectores en un punto de la elipse tal que $E = 90°$ y cuyo seno es $\dfrac{a}{b+c}$. Esto permite escribir la ecuación (115) de esta manera:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\phi \operatorname{sen} E \tag{116}$$

Sea $Y_0$ la ordenada del punto Q de la circunferencia auxiliar de la elipse asociado al punto $P$. Dicha ordenada tiene como valor $a' \operatorname{sen} E$. Luego,

$$Y_0 = a'\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\phi} \quad\therefore\quad \frac{Y_0}{a'} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\phi} = \frac{\left(\dfrac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\left(\dfrac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\phi} \tag{117}$$

Esta proporción es la clave para construir el triángulo, pues permite buscar el punto en la elipse a traves de su punto correspondiente en su circunferencia auxiliar. Con esto, el proceso para construir el triángulo se divide en tres partes a saber:

Primero (Determinación de $Y_0$): Se construye un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{RS} = a' = \dfrac{b+c}{2}$ y cateto $\overline{ST} = c' = \dfrac{a}{2}$. El ángulo opuesto a $ST$ será el ángulo $\phi$ y en su respectivo vértice opuesto se traza una circunferencia de radio $\overline{RS}$. Después se traza el ángulo $A$ con vértice en el centro de la circunferencia trazada y uno de sus lados sobre el cateto $RT$ y se biseca. Se traza una tangente a la circunferencia en el punto $D$ donde esta se corta con la prolongación del cateto $RT$ por $T$. Esta tangente intersectará a los lados de los

[6] Vease, [10], pág. 187, [13], pág. 182.

ángulos $\phi$ y $A/2$ en los puntos $E$ y $F$ respectivamente. Los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ son a su vez $\dfrac{b+c}{2}$ tg $\phi$ y $\dfrac{b+c}{2}$ tg $\dfrac{\alpha}{2}$ (ver figura 13-a). Junto con $a'$, se construye el segmento $Y_0$ mediante la cuarta proporcional (figura 13-b).

Segundo (Ubicación del punto $Q$ sobre la circunferencia auxiliar y de la abscisa del punto $P$): Se traza un segmento $\overline{BC} = a$. Con centro en la mitad de este segmento $D$ y radio $a'$, se traza una circunferencia. Se traza una perpendicular $p$ a $BC$ por $D$, y a partir de este último punto, se busca un punto $E$ sobre $p$ tal que $\overline{DE} = Y_0$. Luego, se traza una paralela a $BC$ por $E$, la cual cortará a la circunferencia en un punto $Q$. La longitud del segmento $\overline{EQ}$ corresponde a la abscisa del punto de la circunferencia auxiliar a la elipse en cuestión, el cual a su vez es la abscisa del punto para el cual $\alpha = A$ (figura 13-c).

Tercero (Determinación completa del punto $P$): En la construcción anterior, se prolonga el segmento $BC$ por ambos extremos hasta que corte a la circunferencia en los puntos $B'$ y $C'$. Se proyecta el punto $Q$ sobre el segmento $B'C'$, su proyección será el punto $G$. Se ubica un punto $F$ sobre el segmento $DQ$ de tal manera que $\overline{DF} = a' - b'$. Se proyecta el punto $F$ sobre el segmento $B'C'$, dando origen al punto $H$. Se traza una paralela a $DQ$ que pase por $H$, la cual intersectará al segmento $GQ$ en $P$. Se unen los puntos $B$ y $C$ con $P$. El triángulo $BCP$ es el triángulo buscado (Ver figura 13-c)[7].

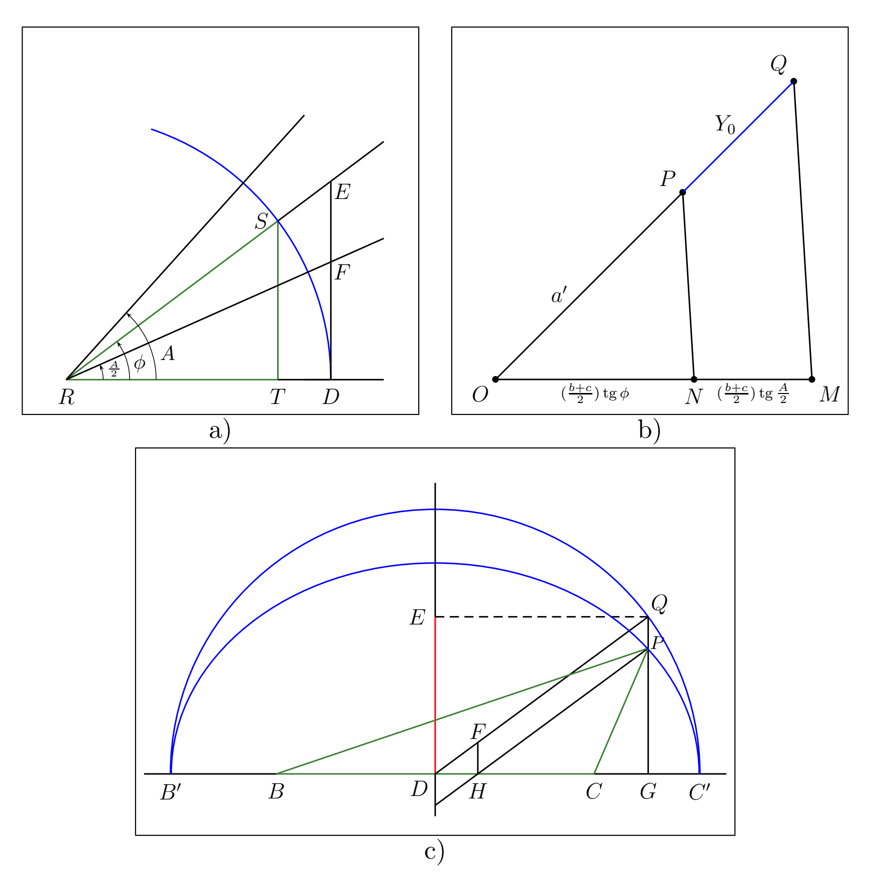



Figura 13. Construcción geométrica del triángulo dados un lado, su ángulo opuesto y la suma de los lados restantes: a) Determinación de los segmentos de longitud $(\frac{b+c}{2})\,\mathrm{tg}\,\phi$ y $(\frac{b+c}{2})\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; b) Construcción de la ordenada del punto $Q$; c) Ubicación del vértice restante.

## 5. Cálculo del área de un triángulo oblicuángulo

Una vez determinados los parámetros desconocidos en un triángulo oblicuángulo, es posible determinar otros parámetros tales como el área, perímetro, bisectrices, etc. En esta sección se estudiará el cálculo del área.

Se comienza con el área de un triángulo oblicuángulo si los datos dados corresponden al cuarto caso, pues a partir de este resultado, se puede encontrar expresiones útiles para los casos restantes. Supóngase conocidos los lados $a$, $b$ y $C$. Independientemente de si $C$ es agudo u obtuso, el área de dicho triángulo, de acuerdo a las figuras 2-a y 2-b es

$$S = \frac{1}{2}a \cdot \overline{AD}$$

[7] El método empleado para trazar el punto de la elipse buscado se basa en tomar una regla y ubicar tres puntos $A$, $B$, $C$, en ella tal que $\overline{AC} = a$ y $\overline{BC} = b$. Luego, se desliza la regla de tal manera que $A$ esté sobre el eje menor y $B$ esté sobre el eje mayor, lo cual hará que $C$ describa la elipse. En [17] y en [13], puede verse una justificación de esta construcción.

De estas se deduce que $\overline{AD} = b \operatorname{sen} C$, luego
$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$
Si se trazan alturas respectivas con los lados restantes, un razonamiento similar conduce a lo siguiente:
$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} B \tag{118}$$
En conclusión, si se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, entonces su área es el semiproducto de los lados y el seno del ángulo ya mencionados.

Si se toma una ecuación del conjunto de relaciones anteriores, por ejemplo $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$, y si se expresa $b$ y $c$ en función de $a$ mediante el teorema del seno, se tiene que
$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \cdot \operatorname{sen} A = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$
Un proceso similar con las restantes relaciones de área, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:
$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C} \tag{119}$$
Estás ecuaciones permiten calcular el área de un triángulo si de él se conoce un lado y dos ángulos, ya sea que tengan un lado en común o uno de ellos sea opuesto al lado dado. Cuando se conoce del triángulo dos lados y un ángulo opuesto a alguno de ellos, se puede usar ya sea una de las ecuaciones (118) o (119). En el caso en el cual se conocen los tres lados, se combina una de las ecuaciones (118) con las fórmulas del ángulo medio, es decir:
$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = bc \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{120}$$
Esta ecuación es la muy conocida fórmula de Herón. Con ella, se puede calcular el área de un triángulo conocidos su perímetro y dos ángulos internos, una vez calculados sus lados de acuerdo a lo expuesto en la sección 4.6

El área del triángulo conocido un lado, su ángulo opuesto y la suma de los lados restantes es fácil de calcular. De la figura 13-c, y teniendo en cuenta que $a' = \frac{b+c}{2}$, $\operatorname{sen} \phi = \frac{a}{b+c}$ y la ecuación (117), se tiene que dicha área es
$$S = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot Y_0 = \frac{1}{2} a \cdot a' \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{1}{4} a(b+c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \left[ \operatorname{arc\,sen} \left( \frac{a}{b+c} \right) \right] \tag{121}$$
O si expresamos dicha área en términos de los parámetros de la elipse asociada al triángulo, entonces
$$S = \frac{1}{4} (2c')(2a') \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left( \frac{b'}{c'} \right) = a'b' \operatorname{tg} \frac{A}{2} \tag{122}$$
Para esta ecuación, se tuvo en mente que
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \phi}} = \frac{a}{\sqrt{(b+c)^2 - a^2}} = \frac{2c'}{\sqrt{4a'^2 - 4c'^2}} = \frac{c'}{b'}$$

## 6. Radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo oblicuángulo

De las discusiones del teorema del seno y de las fórmulas del ángulo medio, surgió el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo en relación con la constante de proporcionalidad del teorema del seno; y el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo como un medio para simplificar las fórmulas de las tangentes de los ángulos medios al igual que en su deducción geométrica. Además de estas circunferencias, existen otras asociadas a un triángulo oblicuángulo denomidadas excritas, cuya definición se da a continuación.

Se dice que una circunferencia es excrita a un triángulo cuando esta es tangente a uno de sus lados y a las prolongaciones de los otros lados tomadas por los extremos del lado en cuestión. Consecuencia de esta definición es que un triángulo cualquiera tiene tres circunferencias excritas (ver figura 14).

En la figura mencionada, se unen los centros de las tres circunferencias para formar el triángulo $PQR$. Para deducir los radios de estas circunferencias, nótese que las líneas $PQ$, $QR$ y $ST$ son las bisectrices de los triángulos externos del triángulo $ABC$, pues, como se sabe de la geometría plana, las bisectrices de dos rectas coplanares que se cortan son los lugares geométricos de los puntos de ese plano que equidistan de ellas.

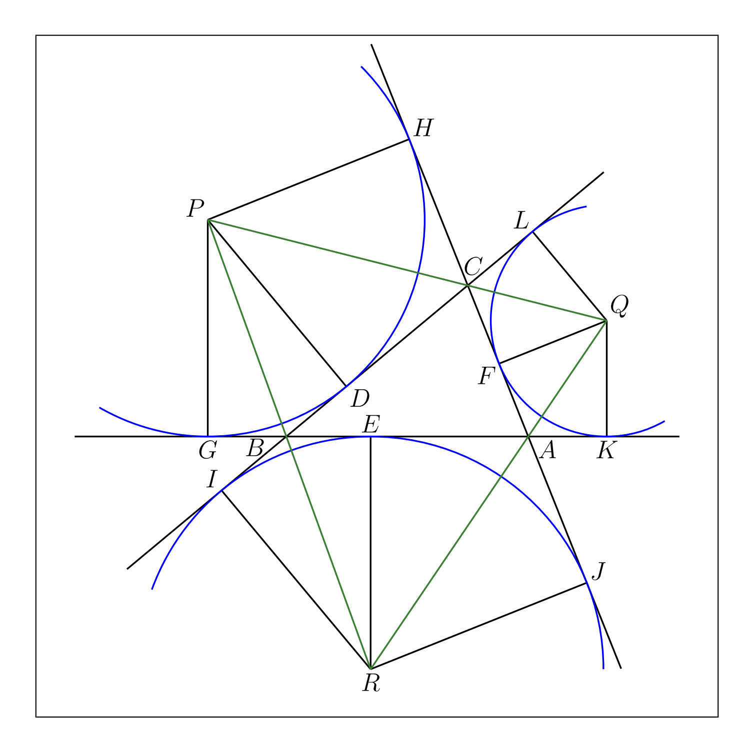



Figura 14. Circunferencias excritas de un triángulo oblicuángulo $ABC$.

Sea $PD = r_a$, $QF = r_b$ y $RE = r_c$ los radios a calcular. Del triángulo $BCP$ se conoce el lado $BC = a$ y los ángulos $\angle PBC = (A + C)/2 = 90° - B/2$ y $\angle PCB = (A + B)/2 = 90° - C/2$, parámetros correspondientes al primer caso de resolución de triángulos. Luego, los demás parámetros son iguales a

$$\angle BPC = 180° - \left(90° - \frac{B}{2}\right) - \left(90° - \frac{C}{2}\right) = 90° - \frac{A}{2} \tag{123}$$

$$BP = BC\frac{\operatorname{sen}\angle PCB}{\operatorname{sen}\angle BPC} = a\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \tag{124}$$

$$CP = BC\frac{\operatorname{sen}\angle PBC}{\operatorname{sen}\angle BPC} = a\frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \tag{125}$$

El radio de la circunferencia excrita de centro $P$ y radio $r_a$ es igual a

$$r_a = PD = PB\operatorname{sen}\angle PBC = a\frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \tag{126}$$

De las fórmulas del ángulo medio, el numerador de la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}} = \frac{p}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2} \tag{127}$$

Este relación permite escribir el radio en cuestión de dos maneras:

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{pr}{p-a} \tag{128}$$

La última relación surge al usar las formulas de las tangentes de los ángulos medios. Los radios restantes se obtienen con los parámetros resueltos de los triángulos $AQC$ y $BRC$.

Para el triángulo $AQC$: se conocen el lado $AC = b$ y los ángulos $\angle QAC = 90° - \frac{A}{2}$ y $\angle QCA = 90° - \frac{C}{2}$, sus demás parámetros son:

$$\angle AQC = 180° - \angle QAC - \angle QCA = 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) - \left(90° - \frac{C}{2}\right) = 90° - \frac{B}{2} \tag{129}$$

$$AQ = AC\frac{\operatorname{sen}\angle QCA}{\operatorname{sen}\angle AQC} = b\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{130}$$

$$CQ = AC\frac{\operatorname{sen}\angle QAC}{\operatorname{sen}\angle AQC} = b\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{131}$$

El radio $r_b$ es igual a

$$r_b = QF = CQ\operatorname{sen}\angle QCA = b\frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \tag{132}$$

y combinando esta relación con las fórmulas del ángulo medio, se tiene que

$$r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{pr}{p-b} \tag{133}$$

Para el triángulo $BRC$: se conocen el lado $AB = c$ y los ángulos $\angle RAB = 90^\circ - \frac{A}{2}$ y $\angle RBA = 90^\circ - \frac{B}{2}$, sus demás parámetros son:

$$\angle ARB = 180^\circ - \angle RAB - \angle RBA = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = 90^\circ - \frac{C}{2} \tag{134}$$

$$AR = AB\frac{\operatorname{sen}\angle RBA}{\operatorname{sen}\angle ARB} = c\frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{135}$$

$$BR = AB\frac{\operatorname{sen}\angle RAB}{\operatorname{sen}\angle ARB} = c\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{136}$$

El radio $r_c$ es igual a

$$r_c = RE = BR\operatorname{sen}\angle RBA = c\frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{137}$$

y combinando esta relación con las fórmulas del ángulo medio, se tiene que

$$r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{pr}{p-c} \tag{138}$$

Sumando los inversos de los radios de las circunferencias excritas, se tiene que

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{pr} + \frac{p-b}{pr} + \frac{p-c}{pr} = \frac{1}{r} \tag{139}$$

Esto muestra que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo oblicuángulo es media armónica de los radios de las circunferencias excritas a dicho triángulo.

En la sección 3-3.1 se mostro que el diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo es la constante de proporcionalidad del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2R \tag{140}$$

Combinando esta relación con las ecuaciones (126), (132) y (137), se obtienen los radios de las circunferencias excritas en función del radio de la circunferencia circunscrita y los ángulos internos del triángulo:

$$r_a = a\frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} = 2R\operatorname{sen}A\frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \tag{141}$$

$$r_b = b\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = 2R\operatorname{sen}B\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = 4R\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \tag{142}$$

$$r_c = c\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 2R\operatorname{sen}C\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \tag{143}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la ecuación (139):

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} &= \frac{1}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{4R\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}\\ &= \frac{\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\end{aligned}$$

Como $A+B+C=180^\circ$, $\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$. Al colocar estas relaciones en la ecuación anterior, se tiene que

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}+\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\right]}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

La relación obtenida, al reescribirla de la siguiente manera:

$$r = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \tag{144}$$

ilustra una relación entre los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en un triángulo oblicuángulo. Una consecuencia de las ecuaciones (141)–(144) es que el radio de la circunferencia inscrita al igual que los radios de las circunferencias excritas son menores que el doble del diámetro de la circunferencia circunscrita.

El triángulo $PQR$, el cual nace al unir los centros de las circunferencias excritas, se denomina el triángulo excrito asociado al triángulo oblicuángulo $ABC$. Sus ángulos internos se determinaron como parte del procedimiento en la deducción de los radios de las circunferencias en cuestión. Sus valores son:

$$P \equiv \angle BPC = 90^\circ - \frac{A}{2} \tag{145}$$

$$Q \equiv \angle CQA = 90^\circ - \frac{B}{2} \tag{146}$$

$$R \equiv \angle ARB = 90^\circ - \frac{C}{2} \tag{147}$$

Solo resta determinar sus lados. El lado $PQ$ es igual a:

$$PQ = PC + CQ = a\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + b\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

Expresando $a$ y $b$ en función de $c$ mediante el teorema del seno:

$$PQ = \frac{c}{\operatorname{sen}C}\left(\frac{\operatorname{sen}A\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\operatorname{sen}B\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\right) = \frac{2c}{\operatorname{sen}C}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = \frac{2c}{\operatorname{sen}C}\cos\frac{C}{2} = \frac{c}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \tag{148}$$

Mediante un procedimiento similar, los lados $QR$ y $RP$ son iguales a

$$QR = QA + AR = b\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + c\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \tag{149}$$

$$RP = RB + BP = c\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} + a\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}} \tag{150}$$

Otra manera de obtener los lados del triángulo excrito $PQR$ es mediante la semejanza que este tiene con los triángulos $BCP$, $ACQ$ y $ABR$, los cuales a su vez, son semejantes entre sí. Solo basta resolver uno de estos triángulos para resolver los demás.

Para finalizar esta sección, se discutirá el área de un triángulo oblicuángulo en relación con los radios de sus circunferencias asociadas. Al despejar los senos de los ángulos internos en las ecuaciones (140):

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{2R} \tag{151}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{2R} \tag{152}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{2R} \tag{153}$$

y reemplazándolos en las ecuaciones (118), se tiene que

$$S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C = \frac{ab}{2}\left(\frac{c}{2R}\right) = \frac{abc}{4R}$$
$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A = \frac{bc}{2}\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{abc}{4R}$$
$$S = \frac{1}{2}ca\operatorname{sen} B = \frac{ca}{2}\left(\frac{b}{2R}\right) = \frac{abc}{4R}$$

El área de un triángulo en términos del radio de la circunferencia circunscrita es

$$S = \frac{abc}{4R} \tag{154}$$

Si se escribe la fórmula de Herón de la siguiente manera:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

el término que acompaña a $p$ es el radio de la circunferencia inscrita, lo que permite expresar el área del triángulo en función de dicho radio:

$$S = pr \tag{155}$$

Si se multiplican los cosenos de los ángulos medios:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$
$$= \frac{p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Utilizando las ecuaciones (154) y (155) en la relación anterior:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{S/4R}S = \frac{p}{4R} \tag{156}$$

Por otro lado, al multiplicar las ecuaciones (126), (132) y (137) miembro a miembro:

$$r_a r_b r_c = abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Y al combinarla con la ecuación (156):

$$r_a r_b r_c = p\frac{abc}{4R}$$

De las ecuaciones (154) y (155), la ecuación anterior se convierte en $r_a r_b r_c = S^2/r$, o despejando el cuadrado del área:

$$S^2 = r r_a r_b r_c \tag{157}$$

## 7. Medianas, bisectrices y alturas de un triángulo oblicuángulo

En esta sección, se estudiará las relaciones entre los lados y ángulos internos de un triángulo oblicuángulo con sus medianas, bisectrices y alturas.

### *7.1 Medianas*

La mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice cualquiera con el punto medio de su lado opuesto (ver figura 15). Entre las propiedades conocidas de las medianas están que se intersectan en un punto denominado baricentro, y que dicho punto dista de un vértice cualquiera 2/3 de su mediana correspondiente.

Sea $M_A$, $M_B$ y $M_C$ los puntos medios de los lados $BC$, $CA$ y $AB$ respectivamente y sea $AM_A$, $BM_B$ y $CM_C$ las medianas del triángulo oblicuángulo $ABC$, cuyas longitudes correspondiente son $m_a$, $m_b$ y $m_c$. (figura 15). Para calcular la longitud de una de ellas, por ejemplo $m_a$, se usa uno de los triángulos $ABM_A$ o $ACM_A$. Ambos triángulos triángulos pertenecen al cuarto caso, pues se conocen dos lados y un ángulo comprendido entre ellos.

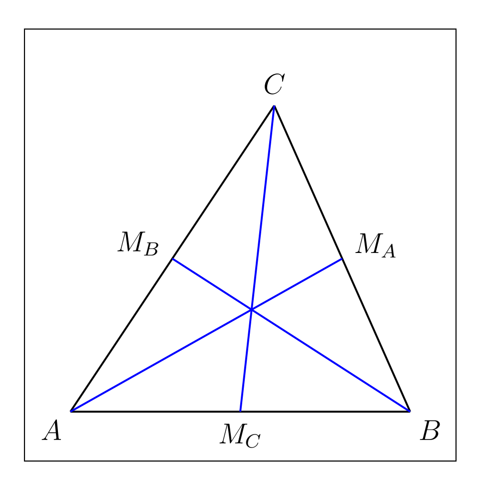



Figura 15. Medianas de un triángulo oblicuángulo

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $ABM_A$:

$$m_a^2 = \overline{AM_A}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM_B}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BM_B} \cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos B$$

y haciendo lo mismo para el triángulo $ACM_A$:

$$m_a^2 = \overline{AM_A}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CM_C}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{CM_C} \cos C = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cos C$$

Por lo tanto

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos B = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cos C \tag{158}$$

Un análisis similar permite establecer relaciones similares con las medianas restantes:

$$m_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc \cos A = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \cos C \tag{159}$$

$$m_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc \cos A = a^2 + \frac{c^2}{4} - ac \cos B \tag{160}$$

Si se expresa los cosenos de los ángulos internos en función de sus lados mediante el teorema del coseno, las ecuaciones (158)–(160) se convierten en

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \tag{161}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \tag{162}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \tag{163}$$

De esta manera, se pueden expresar los cuadrados de las medianas en función de los lados.

Un caso de resolución de triángulos es determinar los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo si se conocen las longitudes de sus medianas. En ese caso, las ecuaciones anteriores son útiles para ello. Estas forman un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, las cuales son los cuadrados de los lados. Al resolver este sistema, se tiene que

$$\frac{9}{4}a^2 = 2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 \tag{164}$$
$$\frac{9}{4}b^2 = 2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2 \tag{165}$$
$$\frac{9}{4}c^2 = 2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2 \tag{166}$$

De estas ecuaciones, se observa que no todos los valores de las medianas dadas pertenecen a un triángulo. Para que esto suceda, los lados derechos de dichas ecuaciones deben ser mayores que cero, es decir:

$$m_b^2 + m_c^2 > \frac{m_a^2}{2} \tag{167}$$
$$m_a^2 + m_c^2 > \frac{m_b^2}{2} \tag{168}$$
$$m_a^2 + m_b^2 > \frac{m_c^2}{2} \tag{169}$$

Si las medianas dadas cumplen las desigualdades anteriores, los lados del triángulo obtenidos con las ecuaciones (164)–(166) deben satisfacer las condiciones deducidas en el quinto caso de resolución de triángulos, ya sea las que están dadas por las desigualdades (75)–(77), o que el semiperímetro sea mayor que los tres lados. Para finalizar esta sección, se encontrará el ángulo que forma una mediana con su lado del triángulo correspondiente, en particular, el ángulo $\angle AM_CC$. Para ello, se aplica el teorema del seno y del coseno al triángulo $AM_CC$:

$$\operatorname{sen} \angle AM_CC = \frac{b \operatorname{sen} A}{m_c} \tag{170}$$
$$\cos \angle AM_CC = \frac{c^2/4 + m_c^2 - b^2}{cm_c} \tag{171}$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores miembro a miembro y combinando este resultado con la ecuación (163):

$$\operatorname{cotg} \angle AM_CC = \frac{c^2/4 + m_c^2 - b^2}{bc \operatorname{sen} A} = \frac{a^2 - b^2}{2bc \operatorname{sen} A} \tag{172}$$

De las relaciones de Mollweide, se puede expresar la diferencia de cuadrados de $a$ y $b$, multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (42):

$$\frac{a+b}{c}\,\frac{a-b}{c} = \frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\operatorname{sen} C}$$

Despejando la diferencia en cuestión y reemplazándola en la ecuación (175), se tiene que

$$\operatorname{cotg} \angle AM_CC = \frac{c}{2b \operatorname{sen} A}\,\frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\operatorname{sen} C} \tag{173}$$

Del teorema del seno, el cociente $c/b$ es igual a $\operatorname{sen} C/\operatorname{sen} B$, luego

$$\operatorname{cotg} \angle AM_CC = \frac{\operatorname{sen}(A-B)}{2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A}{2} \tag{174}$$

El ángulo $\angle AM_CC$ será agudo si $B < A$ y será obtuso si $B > A$. El ángulo $BM_CC$ es el suplemento del ángulo $\angle AM_CC$. Los ángulos que forman las medianas restantes con sus respectivos lados se obtienen de manera similar.

## *7.2 Bisectrices*

La bisectriz de un triángulo oblicuángulo es una línea recta que biseca un ángulo interno de un triángulo. Consecuencia de esta definición es que un triángulo cualquiera tiene tres de ellas. De la geometría elemental, se sabe que se intersectan en un punto $I$ denominado incentro, el cual es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo (ver figura 16).

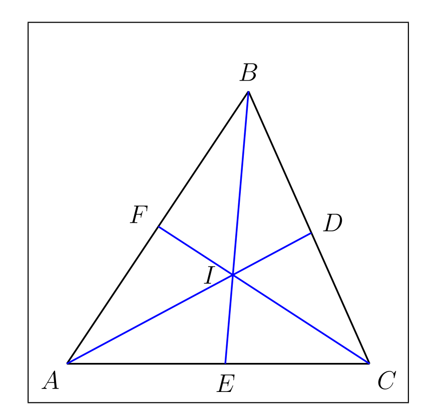



Figura 16. Bisectrices de un triángulo oblicuángulo

Una propiedad muy conocida de las bisectrices de un triángulo es que una de ellas divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los lados restantes. Este resultado puede probarse como sigue: Aplicando el teorema del seno al triángulo $ABD$:

$$\frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}\angle BAD}=\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\angle ADB}$$

Haciendo lo mismo, pero con el triángulo $ACD$, se tiene que

$$\frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen}\angle CAD}=\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\angle ADC}$$

Como $AD$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, $\angle BAD=\angle CAD$; y como los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son suplementarios, $\operatorname{sen}\angle ADB=\operatorname{sen}(180^\circ-\angle ADC)=\operatorname{sen}\angle ADC$, entonces al dividir miembro a miembro las proporciones anteriores y teniendo en cuenta estas observaciones, se deduce que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \tag{175}$$

De esta relación se deducen las siguientes dos[8]:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{DC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{BD}=\frac{ac}{b+c} \tag{176}$$

$$\frac{\overline{BD}+\overline{DC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{DC}=\frac{ab}{b+c} \tag{177}$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo $ABD$:

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}B}=\frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}} \quad \therefore \quad \overline{AD}=\overline{BD}\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}} \tag{178}$$

Como $\operatorname{sen}B=\dfrac{b}{a}\operatorname{sen}A$, entonces al reemplazar esta relación y la ecuación (179) en la ecuación (181), se deduce que la longitud de la bisectriz $AD$ es

$$\overline{AD}=\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \tag{179}$$

Para expresar esta bisectriz en función de los lados, se reemplaza la ecuación (22) correspondiente para el coseno del ángulo medio, es decir:

$$\overline{AD}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{bc\cdot\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}}=\sqrt{bc}\sqrt{1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2} \tag{180}$$

Un razonamiento similar conducirá a relaciones análogas para las demás bisectrices. Estas se enuncian a continuación:

[8] Si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Para la bisectriz $BE$:

$$\overline{AE} = \frac{bc}{a+c} \tag{181}$$

$$\overline{EC} = \frac{ab}{a+c} \tag{182}$$

$$\overline{BE} = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2} = \sqrt{ac}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2} \tag{183}$$

y para la bisectriz $CF$:

$$\overline{AF} = \frac{bc}{a+b} \tag{184}$$

$$\overline{FB} = \frac{ac}{a+b} \tag{185}$$

$$\overline{CF} = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{ab}\sqrt{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2} \tag{186}$$

Las relaciones anteriormente deducidas no son las únicas que pueden derivarse para determinar las longitudes de las bisectrices. Para encontrarlas, se determinarán los ángulos que forma la bisectriz $AD$ con el lado $BC$ en función de los ángulos adyacentes a estos lados. Los ángulos $\angle ADC$ y $\angle ADB$ son exteriores a los triángulos $ADC$ y $ADB$, respectivamente, luego

$$\angle ADC = \frac{A}{2} + B$$

$$\angle ADB = \frac{A}{2} + C$$

Como $A = 180^\circ - B - C$, estos ángulos se convierten en

$$\angle ADC = 90^\circ + \frac{B-C}{2} \tag{187}$$

$$\angle ADB = 90^\circ - \frac{B-C}{2} \tag{188}$$

Aplicando el teorema del seno tanto al triángulo $ADC$ como al triángulo $ADB$:

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \dfrac{B-C}{2}\right)} = \frac{c}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \dfrac{B-C}{2}\right)} = \frac{b}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$$

De estas ecuaciones se obtiene la bisectriz $AD$. Un razonamiento similar concudirá a relaciones similares para las demás bisectrices, las cuales se presentan a continuación:

$$\overline{AD} = \frac{b\operatorname{sen} C}{\cos\dfrac{B-C}{2}} = \frac{c\operatorname{sen} B}{\cos\dfrac{B-C}{2}} \tag{189}$$

$$\overline{BE} = \frac{c\operatorname{sen} A}{\cos\dfrac{C-A}{2}} = \frac{a\operatorname{sen} C}{\cos\dfrac{C-A}{2}} \tag{190}$$

$$\overline{CF} = \frac{a\cos B}{\cos\dfrac{A-B}{2}} = \frac{b\cos A}{\cos\dfrac{A-B}{2}} \tag{191}$$

Para finalizar esta sección, se calculará la distancia del incentro a los vértices de un triángulo oblicuángulo y la razón entre esta distancia y la longitud de su bisectriz correspondiente. Para ello, el triángulo $AIB$ será de utilidad. De él se conoce dos ángulos y un lado común a ellos. De las relaciones del caso I, se deduce que $\overline{AI}$ es igual a:

$$\overline{AI} = \frac{c\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}}{\operatorname{sen}\left(180^\circ - \dfrac{A+B}{2}\right)} = \frac{c\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} \tag{192}$$

Si se razona de igual manera usando el triángulo $AIC$, esta distancia es igual a:

$$\overline{AI} = \frac{b \operatorname{sen} \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{B}{2}} \tag{193}$$

Si se dividen las ecuaciones (195) y (196) con las ecuaciones (192) de tal manera que tanto los terminos $b$ o $c$ se eliminen, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AD}} = \frac{\cos \dfrac{B-C}{2}}{2\cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) \tag{194}$$

El producto de las tangentes en esta ecuación se calculó en la sección 4.6, luego, al reemplazar la ecuación (88) en la ecuación (197), se tendrá que

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AD}} = 1 - \frac{a}{2p} = \frac{b+c}{a+b+c} \tag{195}$$

De forma similar se puede calcular las distancias del incentro a los demás vértices y sus razones con sus correspondientes longitudes de sus bisectrices. Estas se presentan a continuación:

Para $\overline{BI}$:

$$\overline{BI} = \frac{a \operatorname{sen} \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{A}{2}} = \frac{c \operatorname{sen} \dfrac{A}{2}}{\cos \dfrac{C}{2}} \tag{196}$$

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} = \frac{\cos \dfrac{C-A}{2}}{2\cos \dfrac{C}{2} \cos \dfrac{A}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) = 1 - \frac{b}{2p} = \frac{a+c}{a+b+c} \tag{197}$$

Para $\overline{CI}$:

$$\overline{CI} = \frac{a \operatorname{sen} \dfrac{B}{2}}{\cos \dfrac{A}{2}} = \frac{b \operatorname{sen} \dfrac{A}{2}}{\cos \dfrac{B}{2}} \tag{198}$$

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CE}} = \frac{\cos \dfrac{A-B}{2}}{2\cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right) = 1 - \frac{c}{2p} = \frac{a+b}{a+b+c} \tag{199}$$

Es interesante resaltar que la suma de las tres razones da como resultado:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{CE}} = 2 \tag{200}$$

### *7.3 Alturas*

La altura de un triángulo oblicuángulo es el segmento formado por una recta que pasa por un vértice y es perpendicular a la recta que contiene a su lado opuesto. Consecuencia de esta definición es que un triángulo cualquiera tendrá tres alturas. Una propiedad muy conocida de estas es que se intersectan en un punto denominado ortocentro (ver la figura 17).

Sea $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$ y $h_c = \overline{CF}$ las longitudes de las alturas del triángulo $ABC$. De los triángulos rectángulos $ACD$, $ABD$, $ABE$, $BCE$, $ACF$, $BCF$, se tiene que

$$h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \tag{201}$$

$$h_b = c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C \tag{202}$$

$$h_c = a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \tag{203}$$

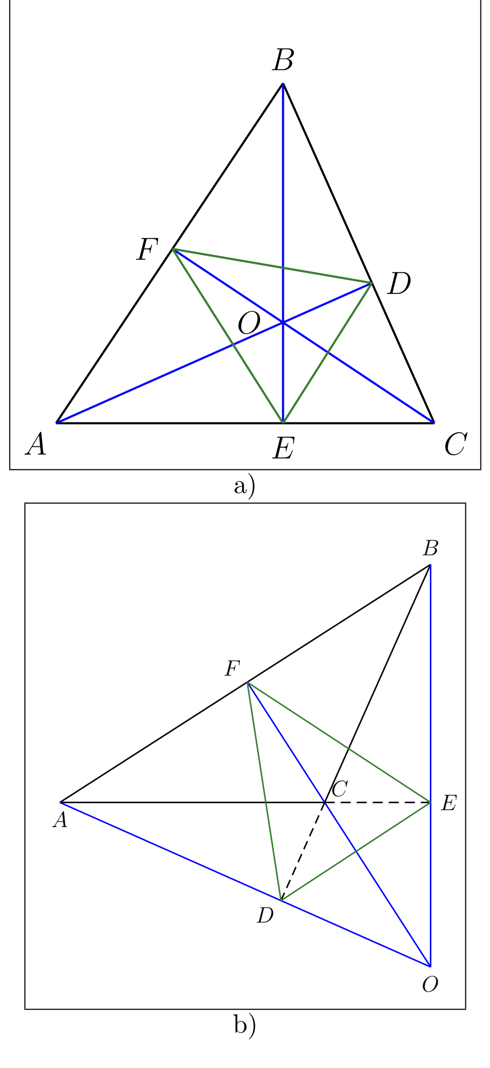



Figura 17. Alturas en un triángulo oblicuángulo cuando: a) el triángulo es acutángulo, b) el triángulo es obtusángulo.

Utilizando la identidad $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ en los miembros medios de las ecuaciones anteriores y utilizando las fórmulas del ángulo medio, se obtienen expresiones de las alturas en función de los lados del triángulo $ABC$. Estas son:

$$h_a = b\operatorname{sen}C = 2b\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{204}$$

$$h_b = c\operatorname{sen}A = 2c\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{205}$$

$$h_c = a\operatorname{sen}B = 2a\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{206}$$

Si se suman los inversos de las alturas:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a/2 + b/2 + c/2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{1}{r} \tag{207}$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (139) se tiene que

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \tag{208}$$

Esta relación, en palabras, dice que el promedio armónico de las alturas de un triángulo oblicuángulo es igual al promedio armónico de los radios de sus circunferencias excritas; promedios que son iguales al radio de su circunferencia inscrita.

Si se unen los pies de las alturas $D$, $E$ y $F$ del triángulo, se obtiene un triángulo conocido como pedal, el cual puede verse en las figuras 17-a y 17-b en verde para los triángulos acutángulo y obtusángulo, respectivamente.

Para resolver este triángulo, es necesario caracterizar los triángulos $AEF$, $BDF$ y $CDE$. Se comienza con el triángulo $CDE$ de la figura 17-a, del cual se conoce los lados $\overline{CD} = b\cos C$ y $\overline{CE} = a\cos C$ y el ángulo $\angle DCE = C$ (con respecto al triángulo correspondiente en

la figura 17-b, $\overline{CD} = b\cos(180^\circ - C) = -b\cos C$ y $\overline{CE} = a\cos(180^\circ - C) = -a\cos C$; segmentos que son positivos, pues $C$ es obtuso y su coseno será negativo). Aplicando el teorema del coseno, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 - 2\overline{CD}\cdot\overline{CE}\cos C = b^2\cos^2 C + a^2\cos^2 C - 2ab\cos^3 C\\ &= (b^2 + a^2 - 2ab\cos C)\cos^2 C\end{aligned}$$

Del triángulo $ABC$, se sabe que $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$, luego

$$\overline{DE} = c|\cos C| \tag{209}$$

Los ángulos internos restantes podrían determinarse mediante el teorema del seno, sin embargo, si se observa que los triángulos $ABC$ y $CDE$ tienen un ángulo igual ($\angle BCA = \angle DCE$) y que el cociente entre los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AC}$ es igual al cociente de los lados $\overline{CE}$ y $\overline{BC}$ (el cual es $\cos C$), entonces ellos son semejantes, y por consiguiente, $\angle DEC = B$ y $\angle EDC = A$. Esta observación se aplica igualmente a los triángulos correspondientes de la figura 17-b, solo que la igualdad de los ángulos se deduce porque son opuestos al vértice y el cociente entre los lados es $\cos(180^\circ - C)$. En resumen: Para el triángulo $CDE$:

$$\overline{DE} = c|\cos C| \tag{210}$$
$$\angle DEC = B \tag{211}$$
$$\angle EDC = A \tag{212}$$

Si se sigue un análisis análogo con los triángulos restantes, se tendrá lo siguiente: Para el triángulo $BDF$:

$$\overline{DF} = b|\cos B| \tag{213}$$
$$\angle DFB = C \tag{214}$$
$$\angle FDB = A \tag{215}$$

y para el triángulo $AEF$:

$$\overline{EF} = a|\cos A| \tag{216}$$
$$\angle FEA = B \tag{217}$$
$$\angle EFA = C \tag{218}$$

Esto aplica para los triángulos correspondientes de la construcción del triánguo obtusángulo. Del triángulo $DEF$ se conoce sus lados, dados por las ecuaciones (213), (216) y (219). Sus ángulos internos, sin embargo, deben calcularse con cuidado.

Comenzando con el ángulo $\angle EFD$, en la construcción del triángulo acutángulo:

$$\angle EFD = 180^\circ - (\angle EFA + \angle DFB) = 180^\circ - 2C$$

y en la construcción del triángulo obtusángulo:

$$\begin{aligned}\angle EFD &= 180^\circ - (\angle DFA + \angle EFB) = 180^\circ - (180^\circ - \angle EFA + 180^\circ - \angle DFB)\\ &= 2C - 180^\circ\end{aligned}$$

este ángulo puede expresarse en una sola ecuación:

$$\angle EFD = |180^\circ - 2C| \tag{219}$$

Los ángulos $\angle FDE$ y $DEF$, mediante un análisis similar son iguales a

$$\angle FDE = |180^\circ - 2A| \tag{220}$$
$$\angle DEF = |180^\circ - 2B| \tag{221}$$

Esta sección finaliza con una discusión sobre cómo resolver un triángulo obliguángulo dadas sus alturas. Para ello, se expresa el área $S$ del triángulo en función de sus alturas, es decir:

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c \tag{222}$$

Si se reescribe este conjunto de igualdades de la siguiente manera:

$$2S = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} \tag{223}$$

entonces, de las propiedades de las proporciones, se tiene que

$$2S = \frac{2p}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} = \frac{p}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)} \tag{224}$$

Con las ecuaciones (223) y (224), se puede construir las siguientes proporciones:

$$2S = \frac{p-a}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)} \tag{225}$$

$$2S = \frac{p-b}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)} \tag{226}$$

$$2S = \frac{p-c}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)} \tag{227}$$

Con ellas, se puede expresar tanto el semiperímetro como su diferencia con los lados en función del área y de las alturas, es decir:

$$p = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right) \tag{228}$$

$$p-a = S\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right) \tag{229}$$

$$p-b = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right) \tag{230}$$

$$p-c = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right) \tag{231}$$

Ahora, empleando las fórmulas de la tangente del ángulo medio, se puede calcular los ángulos internos:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}} \tag{232}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}} \tag{233}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}} \tag{234}$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse si se utiliza la ecuación (207). Al hacerlo, estas se convierten en:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_b}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_c}\right)}{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_a}\right)}} = \sqrt{\frac{h_a(h_b-2r)(h_c-2r)}{h_b h_c(h_a-2r)}} \tag{235}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_c}\right)}{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_b}\right)}} = \sqrt{\frac{h_b(h_a-2r)(h_c-2r)}{h_a h_c(h_b-2r)}} \tag{236}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_b}\right)}{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_c}\right)}} = \sqrt{\frac{h_c(h_a-2r)(h_b-2r)}{h_a h_b(h_c-2r)}} \tag{237}$$

Las ecuaciones anteriores, además de expresar los ángulos internos en función de las alturas, da una condición para saber cuándo puede resolverse un triángulo si se conocen sus alturas, las cuales deben ser mayores que el diámetro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo, o si se prefiere expresarla de otra manera, las alturas deben ser mayores al doble de su media armónica. Sobra decir que, una vez calculados los ángulos, debe verificarse que su suma sea de 180°. Si esto se cumple, los lados se calculan mediante las ecuaciones (201)–(203):

$$a = \frac{h_b}{\operatorname{sen} C} = \frac{h_c}{\operatorname{sen} B} \tag{238}$$

$$b = \frac{h_c}{\operatorname{sen} A} = \frac{h_a}{\operatorname{sen} C} \tag{239}$$

$$c = \frac{h_a}{\operatorname{sen} B} = \frac{h_b}{\operatorname{sen} A} \tag{240}$$

La solución obtenida se verifica primero, examinando que el semiperímetro sea mayor a los lados; y segundo, determinar si se satisface una de las relaciones de la proyección o de Mollweide.

## 8. Conclusión

Además de lo discutido en párrafos anteriores, quedó por fuera muchas temáticas, como la resolución de un triángulo conocidas sus bisectrices, o la variación de los parámetros de un triángulo ante pequeñas variaciones de los demás, o la resolución de polígono regulares, entre otras. Sin embargo, con lo expuesto aquí, el lector no tendrá inconveniente alguno en abordar estas temáticas...


## 9. Agradecimientos

Quisiera agraceder a...


## Bibliografía


[1] Ayres Jr, F. Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Edit. McGrawHill, New York, 1954.

[2] Airy, G. B. A Treatise on Trigonometry. Edit. Richard Griffin and Company. London. 1855. Disponible en: `https://archive.org/details/atreatiseontrig00airygoog`

[3] BlackBurn, H. Elements of Plane Trigonometry for the Use of the Junior Class of Mathematics in the University of Glasgow, edit. Macmillan and co., 1871. Disponible en: `http://www.gutenberg.org/ebooks/32973`

[4] Chauvenet, W. A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry, Edit. J. B. Lippincott Company, Fifth Edition, Philadelphia, 1883. Disponible en : `https://archive.org/details/atreatiseonplan09chaugoog`

[5] Enciclopedia Universal Europeo–Americana, Edit. Espasa–Calpe, Vol. 64, Artículo de Trigonometría, pág. 554–579. Madrid, 1928.

[6] Fossi Gutiérrez, I. Trigonometría plana y esférica. Edit. Dossat, Cuarta edición, Madrid. 1959.

[7] Goodwin, H. B. Plane and Spherical trigonometry. Edit. Longmans, Green and Co. London, 1907. Disponible en: `https://archive.org/details/planesphericaltr00goodrich`

[8] Granville, W. A. y Smith, P. F. y Mikesh, J. S. Trigonometría plana y esférica, Edit. Uteha, 1969.

[9] Hobson, E. W. A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry. Edit. Cambrigde University Press. London. 1911. Disponible en: `https://archive.org/details/cu31924073537254`

[10] Lehmann, C. H. Geometría analítica. Edit. Limusa, México, 1996.

[11] Loomis, E. Elements of Plane and Spherical Trigonometry, Edit. Harper & Brothers Publishers, twenty-five edition, 1867. Disponible en `https://archive.org/details/planespherical00loomrich`

[12] Moritz, R. E. Elements of Plane Trigonometry. Edit. John Wiley and Sons. London, 1910. Disponible en: `https://archive.org/details/elementsofplanet030685mbp`

[13] Nichols, E. W. Analitic Geometry for Colleges, Universities and Technical Schools. Edit. Leach, Shewell & Sanborn. 1892.

[14] Olney, E. Elements of Trigonometry, Plane and Spherical. Edit. Sheldon & Company. New York, 1872. Disponible en: `https://archive.org/details/elementstrigono00olnegoog`

[15] Roanes Macías, E. Introducción a la geometría. Edit. Ediciones Anaya. Madrid. 1980.

[16] Sparks, F. W. y Rees, K. P. Trigonometría plana. Edit. Reverté. España. 1966.

[17] Viedma, J. A. Introducción a la geometría analítica. Edit. Norma. Cali, Colombia.

[18] Young, J. W. y Morgan, F. M: Plane Trigonometry and Numerical Computation, Edit. The Macmillan Company, 1919. Disponible en https://archive.org/details/planetrigonometr00younrich